

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Серия «История науки и техники»

В. А. НИКИФОРОВСКИЙ

ПУТЬ К ИНТЕГРАЛУ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
А. Т. ГРИГОРЬЯН



МОСКВА
«НАУКА»

1985

УДК 517.3(091)

Никифоровский В. А. Путь к интегралу.— М.: Наука, 1985.

Одна из основных идей математики — идея интегрирования зародилась в глубокой древности и получила начало в творчестве Архимеда. Она совершенствовалась в последующие времена и своим содержанием обогатила современную математику. В книге прослеживается развитие понятия интеграла от Архимеда до Коши и Римана.

Рассчитана на читателей, интересующихся математикой и ее историей.

Рецензенты:

И. А. БРИЦ, С. А. ЛОМОВ, И. Ф. СКИРКО

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие интеграла пронизывает всю современную математику. И не только ее — в науках физического и технического циклов находят приложение различные вариации интеграла. Стоит раскрыть любую книгу, относящуюся к точным наукам, как встретится знак интеграла и предложения, включающие слово «интеграл». Более того, в последнее время вошли в обиход такие термины, как, например, «интегральная схема», «экономическая интеграция», которые прямого отношения к интегралу не имеют, но смысловую нагрузку сохраняют и находят широкое распространение в литературе и разговорной речи.

В сокровищнице науки и культуры есть идеи, которые, возникнув в глубокой древности и развиваясь и совершенствуясь, прошли через все последующие времена и успешно служат человечеству сейчас. К ним безусловно следует отнести идею интеграла в математике.

Начала интегральных методов прослеживаются в трудах Архимеда, пользовавшегося ими при решении многих геометрических задач и доказательстве теорем. В книгах по истории математики соответствующие разделы так и называются — «Интегральные методы Архимеда». И в этом нет никакого преувеличения, хотя открытие интегрального исчисления, время, когда впервые было произнесено слово «интеграл», отделяет от работ Архимеда огромный временной интервал в 2000 лет. Для перехода от методов Архимеда к алгоритму интегрального исчисления, применимому к обширному классу задач, математика должна была пройти долгий путь, на котором была создана буквенная символика, построено учение о функциональных зависимостях, разработан аналитический аппарат для выражения их.

На этом пути к работам Архимеда обращались дважды: на арабском средневековом Востоке и в Европе XVI—XVII вв. Но все попытки значительно продвинуться вперед кончались неудачей. Лишь создание буквенного исчисления Виетом и аналитической геометрии Декартом и Ферма, а также успехи физических наук Нового времени обеспечили возможность разработки анализа бесконечно малых. Роль Архимеда в этом процессе Лейбниц охарактеризовал словами: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим исследованиям геометров».

Совершенствование методов Архимеда и создание интегрального исчисления, его развитие осуществлялись в работах Кеплера, Кавальери, Торричелли, Паскаля, Ферма, Валлиса, Роберваля, Барроу, Ньютона, Лейбница, братьев Якоба и Иоганна Бернулли (И. Бернулли принадлежит термин «интегральное исчисление»; он первый прочитал курс лекций по интегральному исчислению для маркиза Лопиталья), Эйлера, Коши, Римана.

Развитие идеи интеграла затем шло в направлении придания понятию интеграла все большей общности, расширения его применимости к решению новых классов задач математики и физики, построения многомерных, поверхностных и криволинейных интегралов.

В этой книге рассказывается о развитии понятия интеграла, его содержания и многочисленных приложений. Так как она рассчитана на широкий круг читателей, то вовсе не обязательно проследивать процесс во всех деталях и роль многочисленных тружеников науки при этом. Выбираются главнейшие этапы и основные исследователи; другие же, может быть не менее великие, остаются вне поля зрения.

И еще одна специфическая деталь. В определенный период своего развития математика подошла к такому рубежу, когда назрела необходимость решения насущных задач, связанных с фундаментальными открытиями. Одними и теми же задачами занимались зачастую многие математики, и установить приоритет, указать, кто первый сделал то или иное открытие, затруднительно. Думается, что в такой книге, как эта, вряд ли существует необходимость обсуждения приоритетных вопросов: интереснее ознакомиться с тем, кто и как решал ту или иную задачу.

При чтении книги с анализом истории идей полезно

помнить следующие слова австрийского математика О. Нейгебауера: «Я не считаю, что цель исторической работы состоит в том, чтобы втиснуть всю сложность исторических процессов в своего рода «резюме»... Наоборот, я вижу основную задачу исторического исследования в раскрытии громадного богатства явлений, связанных с любой фазой человеческой истории, и тем самым в противодействии естественной тенденции к свертыванию и произвольным построениям, являющимся верными спутниками невежества» [26, с. 200].

Вооружившись наставлением Нейгебауера, отправимся теперь в путь.

ИСТОКИ

1

И вот мы находимся у самого начала, хотя указать его не может никто. Та математика, которую мы привыкли воспринимать, наука доказательная, иными словами — дедуктивная, абстрактная, сложилась в Древней Греции в период ее расцвета на основе собранных ранее в Египте и Вавилоне разрозненных не-систематизированных знаний, содержащих правила для решения различных задач, возникающих при возведении храмов и пирамид, связанных с расчетами календаря, распределением урожая, сбором налогов, организацией общественных работ. В математике Древнего Востока совершенно отсутствовали обоснования рекомендуемых правил; характерная черта ее состояла также в крайне медленном развитии — на протяжении многих веков наблюдался лишь незначительный прогресс.

Платон об отношении греков к культурам Востока писал: «Что бы эллины ни перенимали от варваров, они всегда доводили это до более высокого совершенства»¹.

Существенное отличие греческой математики от предшествующей американский математик Д. Я. Стройк в «Кратком очерке истории математики» охарактеризовал так: египтяне и вавилоняне отвечали на вопрос «как?», греков интересовало другое — «почему?». Он писал: «Первоначально греки занимались математикой, имея одну основную цель — понять, какое место во вселенной занимает человек в рамках некоторой рациональной схемы. Математика помогла найти порядок в хаосе, связать идеи в логические цепочки, обнаружить основные принципы. Она была наиболее теоретической из всех наук» [34, с. 55]. В философских школах Фалеса, Пифагора, Демокрита, Платона, Аристотеля соседствовали занятия математикой и философией, что благоприятно влияло на их развитие. (Вспомним хотя бы легенду о том, что у входа

в Академию Платона было начертано: «Пусть не входит сюда не знающий геометрии».)

Основатели греческой науки Фалес, Пифагор, Демокрит, Евдокс путешествовали по странам Древнего Востока, где ознакомились с состоянием математики и астрономии. Здесь уместно заметить, что еще в древности можно усмотреть два взгляда на возникновение математики. Аристотель объяснял занятия наукой в Египте тем, что жрецы располагали необходимым для этого временем: наука — свободное творение ума. Древнегреческий историк Геродот, живший в V в. до н. э., отмечал практическую направленность математики: во время разливов Нила затоплялась обрабатываемая плодородная земля, необходимо было знать, что затоплено, чтобы впоследствии когда вода отступит, водворить владельцев на старые места; «...это было, как мне кажется, начало геометрии, которая оттуда перешла в Грецию». То же самое утверждал и известный комментатор Евклида Прокл Диадокх (410—485): «...согласно большинству мнений, геометрия впервые открыта в Египте, имела свое происхождение в измерении площадей» [12, с. 33].

Завершили создание греческой математики виднейшие представители ее — Евклид, Архимед и Аполлоний; в трудах их, дошедших до нас, разработана математика, послужившая фундаментальной основой современной математики. И не только математики, а и всего научного естествознания.

2

Имеет смысл хотя бы в общих чертах охарактеризовать достижения греческих математиков до того периода, когда на сцену вышли Евклид, Архимед, Аполлоний (конечно же, в той мере, в которой это связано с темой книги).

По преданию, греческую математику основал Фалес из Милета (греческой колонии в Малой Азии) — купец, философ, астроном и математик, «отец греческой науки», живший в VI в. до н. э. Он создал ионийскую философскую школу, объяснявшую многообразие мира единым материальным началом. Фалес считал таким началом воду. Математика и астрономия входили составными частями в ионийскую философскую систему.

Во время путешествий Фалес ознакомился с астрономическими наблюдениями вавилонян, изучил пра-

вила для астрономических расчетов, полученные от египетских жрецов, и, по свидетельству Геродота и Диогена Лаэртция, предсказал солнечное затмение, происшедшее 28 мая 585 г. до н. э. во время битвы при Галисе между лидийцами и мидянами. «День обратился в ночь», — писал Геродот. Воины были так напуганы затмением, что прекратили сражение и заключили мир.

Из геометрических достижений Фалесу приписывают доказательство того, что диаметр делит круг пополам, установление равенства углов при основании равнобедренного треугольника, равенства вертикальных углов при пересечении двух прямых, доказательство равенства двух треугольников, имеющих по одной равной стороне и по два соответственно равных угла, прилежащих к равным сторонам, способ определения расстояния до недоступных предметов, основанный на этом признаке равенства треугольников.

Между прочим, еще в глубокой древности пошли рассказы о рассеянности ученых. Платон писал, что во время наблюдения звезд Фалес упал в колодезь, и рабыня посмеялась над ним: «Хочет знать, что делается на небе, а что делается у него под ногами, не видит».

Если о Фалесе до нас дошли только отдельные отрывочные сведения, то личность Пифагора стала полубогемной еще в древности. Пифагор жил в VI в. до н. э., родился он на о-ве Самосе, путешествовал по многим странам Востока. В Египте попал в плен к персидскому завоевателю Камбизу и был отправлен в Вавилон, где в течение семи лет изучал у магов теорию чисел, музыку, другие науки. В некоторых источниках упоминается, что тогда же Пифагор познакомился с Зороастрой (Заратустрой).

Около 530 г. Пифагор поселился в Кротоне (южная Италия) и основал пифагорейский союз, ставивший перед собой религиозно-этические, политические и научные цели. В начале V в. пифагорейцы после неудачного выступления на политическом поприще были изгнаны из южной Италии, а союз прекратил свое существование. Но влияние пифагорейцев на науку сохранялось долго.

Геродот называл Пифагора выдающимся софистом (учителем мудрости). Современники считали его религиозным пророком. Он проповедовал бессмертие души, ввел для своих последователей строгие правила жизни, образовал в некотором роде орден, братство верующих.

В него производился строгий отбор, посвященные должны были пройти испытательный срок, после чего могли слушать голос учителя из-за занавеса, а видеть его суждено было им только через несколько лет, после того как их души будут очищены музыкой и строгой жизнью.

Считалось, что очищение и постижение тайн гармонии и чисел приближали души к божеству. И это должно произойти при помощи математики, которая входила составной частью в религию пифагорейцев. В учении пифагорейцев неразрывно связаны музыка, гармония и числа.

Школа Пифагора была замкнутой, что, как ни странно, в тех условиях способствовало развитию математики, поскольку внутри школы тесно общались знающие математику. Однако это не способствовало распространению полученных знаний вне школы. По той же причине неизвестно, какие результаты в математике принадлежат Пифагору. Вернее всего — все отдавалось ему.

Ранние пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, теорией музыки и теорией чисел (арифметикой). В геометрии они рассматривали свойства прямоугольных фигур (треугольников, прямоугольников, параллелограммов). Пифагору приписывают доказательства носящей его имя теоремы, частные случаи которой известны были и ранее.

Владели пифагорейцы и первоначальными сведениями из стереометрии (они знали три правильных многогранника из пяти). Достижения пифагорейцев в планиметрии вошли впоследствии в первую книгу «Начал» Евклида. Пифагорейцы нашли решения в целых числах неопределенного уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, названные «пифагоровыми тройками».

Основным достижением пифагорейцев в математике было открытие иррациональных величин в виде несоизмеримых отрезков. Оно стало поворотным пунктом в развитии греческой математики, ибо нарушило пифагорейскую гармонию геометрии и арифметики: оказалось, что отношения целых чисел не могут выражать отношений любых двух отрезков. Не существует, например, среднего геометрического единицы и двойки, которые у пифагорейцев считались священными символами.

После открытия несоизмеримости на пути преодоления возникших в связи с этим принципиальных труд-

ностей пифагорейцами стала разрабатываться геометрическая алгебра, применяемая при доказательстве алгебраических соотношений и решении квадратных уравнений². Она изложена во II книге «Начал» Евклида, ею успешно пользовались Архимед и Аполлоний. Геометрическая алгебра содействовала получению древними новых результатов, но впоследствии тормозила развитие античной математики.

Греческую математику ожидал еще один удар: открытие несоизмеримых отрезков и иррациональных чисел привело математику к понятию бесконечности, греки стали оперировать с бесконечными множествами так же, как с конечными величинами. Проблемой бесконечности заинтересовались не только математики, но и философы. Появились парадоксы (апории) Зенона Элейского, раскрывшие трудности, связанные с понятиями бесконечного и непрерывного. Апории Зенона будоражили мысль и во все последующие времена. Зенон выдвинул более 40 апорий, до нас дошло девять; они посвящены движению и непрерывности.

Знаменитый философ и математик V—VI вв. до н. э., основатель древней атомистики, Демокрит из Абдера (город во Фракии) пытался преодолеть возникшие в математике трудности, полагая, что тела состоят из конечного числа элементарных частей определенного объема; тогда объем тела можно получить суммированием объемов этих элементарных частей. По свидетельству Архимеда, Демокрит знал, что объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ объема призмы, имеющей с пирамидой одинаковые основание и высоту, а объем конуса — $\frac{1}{3}$ соответствующего цилиндра. Архимед считал результаты Демокрита недоказанными.

Существенную роль в разрешении кризиса и вообще в построении греческой математики сыграли разработанные Евдоксом Книдским теория отношений и метод исчерпывания, усовершенствованный и успешно примененный Архимедом.

Математик, астроном, географ, врач, Евдокс родился около 406 г. до н. э. в Книде (Малая Азия), умер около 355 г. Он путешествовал по Египту, Великой Греции, изучал там математику, медицину, астрономию, побывал в Афинах, где в то время функционировала Академия Платона. От Архита — учителя Евдокса и самого Евдокса пошло в математике то направление, которое образовало математический анализ.

В Кизике, на побережье Мраморного моря, Евдокс организовал первую в Греции обсерваторию, в которой велись астрономические наблюдения, был создан звездный каталог. Евдокс построил модель солнечной системы, состоящую из 27 вращающихся вокруг Земли сфер. Он утверждал, что Солнце больше Земли, но диаметр Солнца лишь в 9 раз больше земного.

Разработанные Евдоксом теория отношений и метод исчерпывания отвергали актуальную (физически существующую) бесконечность, внесшую столько недоразумений в античную математику. Аристотель писал: «Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного... не отнимает у математиков их теории; ведь они не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: математикам надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, какой им желательно, и в такой же пропорции, в какой делится величайшая величина, можно разделить и какую угодно другую» [1, с. 6].

Теория отношений Евдокса изложена в V книге «Начал» Евклида, в VI книге даны приложения ее к подобию фигур и решению квадратных уравнений.

Понятие величины Евдокса включало в себя как числа, так и непрерывные величины — отрезки, площади, объемы, и было обобщением аналогичных понятий предшественников. Относительно равенства и неравенства величин формулировались определенные аксиомы, которые приведены в «Началах» Евклида:

«1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5. И целое больше части» [11, с. 14].

Эти 5 аксиом Евдокс дополнил еще одной: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» [11, с. 142]. Это означает следующее: для любых a и b можно найти такие целые n и m , что будет $na > b$ и $mb > a$. Архимед позднее сформулировал эту аксиому в ином виде, именно: если рассматривать некоторые числа a и b , $a > b$, то разность $a - b$ можно взять кратной столько раз, что будет $n(a - b) > a$, $m(a - b) > b$.

Равенство отношений Евдокс определял так: «Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке» [11, с. 142]. В таком случае четыре величины называются пропорциональными. Предыдущее определение означает: равенство $a : b = c : d$ будет, когда при любых n и m получим либо $ma > nb$ и $mc > nd$, либо $ma = nb$ и $mc = nd$, либо $ma < nb$ и $mc < nd$. Точно так же, как для величин аксиома 1 устанавливала транзитивность, доказывалась и транзитивность отношений: если отношения $a : b$ и $c : d$ равны порознь отношению $e : f$, то величины a , b , c и d пропорциональны.

Теория отношений Евдокса, в отличие от числовой арифметики пифагорейцев, применялась как к соизмеримым, так и несоизмеримым величинам; ею пользовались в математике вплоть до того времени, когда в XIX в. Дедекин и Вейерштрасс разработали теорию действительных чисел.

Второй фундаментальный вклад Евдокса в математику составляет метод исчерпывания, получивший такое название в XVII в. и применявшийся древними при доказательстве теорем, связанных с вычислением площадей, объемов и других величин. Он считается первым вариантом теории пределов.

В основе метода лежала лемма: если a и b , $a > b$, — две величины, подчиненные аксиоме Евдокса—Архимеда, и если вычесть из a больше ее половины, из остатка больше его половины и продолжать так неограниченно, то после некоторого конечного числа операций получится остаток $\alpha_n < a/2^n \leq b$. Это означает, что предел α_n равен 0.

Поясним применение метода исчерпывания. Предположим, что необходимо вычислить площадь некоторой фигуры, т. е. найти величину A . В эту фигуру вписывались фигуры, площади которых известны и образуют монотонную последовательность $A_1 < A_2 < \dots < A_n$, причем должно быть

$$A - A_1 < A/2, \quad A - A_2 < (A - A_1)/2 < A/4, \dots \\ \dots, \quad A - A_n < A/2^n.$$

Тогда в силу основной леммы при большом n разность $A - A_n$ может быть меньше любой величины b . Далее отыскивался предел последовательности $\{A_i\}$, т. е. такое число B , что разность $B - A_n$ становилась как угодно малой. Завершалось нахождение A доказательством того, что $A = B$. Если воспользоваться современной терминологией элементарного анализа, то доказывалось, что из равенств $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$

следовало $A = B$. Здесь применялся способ доказательства от противного. Пусть $A \neq B$, т. е. $A < B$ или $A > B$. Положим в первом случае $b = B - A$; получим $B - A_n < B - A$, $A_n > A$, а это невозможно. Точно такие же рассуждения отвергают и $A > B$.

Методом исчерпывания математики древности пользовались для строгого доказательства истинности результатов, полученных различными некорректными операциями с бесконечностью, предельными переходами. Евдокс методом исчерпывания доказал следующие теоремы: площади кругов относятся как квадраты диаметров; объем пирамиды равен $1/3$ объема призмы, имеющей с пирамидой те же основание и высоту; объем конуса равен $1/3$ объема цилиндра, имеющего с конусом те же основание и высоту. Евклид к ним добавил еще теорему о том, что объемы шаров относятся как кубы диаметров.

Таким образом, в школе Евдокса за период от 350 до 200 г. до н. э. трудами великих Евклида, Архимеда, Аполлония была создана греческая дедуктивная математика, служившая человечеству многие века.

3

Расцвет античной математики связан с благоприятными условиями общественного развития. Во время походов Александра Македонского культура эллинов распространилась на многие страны вплоть до Индии. Это было началом эпохи эллинизма. В 323 г. до н. э. Александр Македонский умер в Вавилоне; его полководцы разделили завоеванные земли между собой. Так сложилось три государства: Египет с династией Птолемеев; Месопотамия и Сирия, где правили Селевкиды; Македония под властью Антигона и его преемников. Александрия — столица Птолемеев — стала вскоре торговым, научным и культурным центром древнего мира.

Птолемей I основал в Александрии Мусейон — дом муз; в него приезжали виднейшие ученые того времени. Греческая молодежь стекалась из всех стран в Александрию слушать лекции по философии, математике, астрономии, медицине. В Мусейоне была огромная библиотека, содержащая копии многих греческих произведений, начиная от Гомера; в I в. н. э. она насчитывала 700 000 томов. В отличие от афинских частных школ — Академии Платона, Ликейя Аристотеля и других, Мусейон Александрии субсидировался государством, и ученые, не заботясь о насущных нуждах, могли целиком посвящать себя наукам.

Характерная особенность математики наступившей эпохи состояла в том, что ее методы находили себе применение не только в астрономии, но на основе их строились статика и гидростатика, они проникали также в оптику, теорию музыки.

Первым из великих математиков древности, труды которого дошли до наших дней, был Евклид, живший во времена Птолемея I, в III в. до н. э. О нем сохранилось очень мало сведений. Александрийский математик Папп, написавший в III в. восемь книг по математике, сообщал, что Евклид был доброжелателен, корректен, лишен тщеславия. Во многом характеризует его известный анекдот. На вопрос царя Птолемея I о том, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем преодоление «Начал», Евклид сказал: «В геометрии нет царской дороги».

Евклид написал «Начала» — книгу, в истории западного мира после Библии наибольшее число раз издававшуюся и наиболее изучаемую. «После изобретения книгопечатания появилось более тысячи изданий, а до того эта книга, преимущественно в рукописном виде, была основой при изучении геометрии», — писал Стройк. «Начала» представляли собой фундамент всей античной математики. Построенная Евклидом математика служит базой изучаемой во всех школах мира элементарной геометрии и в наше время. Евклидова геометрия лежит в основании классической и прикладной механики.

Евклид занимался также астрономией, оптикой, теорией музыки. Он написал «Феномены» — труд, посвященный астрономии, «Оптику», содержащую учение о перспективе, «Сечение канона» — сочинение по теории музыки, трактат о конических сечениях. Его

«Данные», в которых излагалось приложение алгебры к геометрии, до нас не дошли.

Не следует думать, что Евклид строил геометрию только на тех основах, о которых рассказано выше. В математике были и другие существенные достижения, связанные, например, с неразрешимыми задачами древних — квадратурой круга, трисекцией угла, удвоением куба.

Не будем останавливаться в деталях на вкладе Евклида, так же как и жившего значительно позднее Аполлония в математику — это находится вне темы книги. Напомним лишь содержание «Начал». Они состоят из 13 книг, к которым присоединяют еще 2, не принадлежащие Евклиду. В «Началах» изложены планиметрия и стереометрия, геометрическая алгебра, теория отношений, теория чисел, решение квадратных уравнений, дана классификация квадратных иррациональностей.

«Начала» сыграли огромную роль в развитии математики. И не только ее. Эйнштейн отметил важную сторону воздействия «Начал» на цивилизацию. Он писал: «Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для творческих исследований, кто в молодости не восхищался этим творением» [45, с. 62].

РОЖДЕНИЕ ИДЕИ

1

Теперь мы подошли к тому времени, когда творил один из величайших представителей рода человеческого — Архимед. Не зря говорят, что люди, жившие, живущие сейчас и те, кто будет жить позже, знали, знают и будут знать Архимеда.

Об Архимеде известно больше, чем об упомянутых выше математиках. И это объясняется не только величиной его научного подвига, но и тем, что жил он в Сиракузах и вынужден был письменно сообщать математикам Александрии о своих открытиях; тексты посланий и некоторых его сочинений сохранились и вошли важной составной частью в сокровищницу науки.

Имеются превосходно изданные на русском языке сочинения Архимеда со вступительной статьей и комментариями И. Н. Веселовского.

Исследователи пишут, что Архимед был не то родственником, не то другом и советником царя Гиерона, что, вероятно, способствовало его плодотворной деятельности. Родственник отца Архимеда — астронома и математика Фидия, Гиерон первоначально был небогатым гражданином. В войсках Пирра, прибывшего в 280 г. до н. э. на Сицилию с материковой Греции, чтобы помочь сицилийцам в борьбе против Рима и Карфагена, Гиерон отличился; после ухода Пирра в Грецию он захватил в Сиракузах неограниченную власть.

Архимед родился в 287 г. до н. э. в Сиракузах; начальное образование, по-видимому, получил у отца — Фидия, привившего ему любовь к математике, астрономии и механике. Затем Архимед отправился в Александрию, где изучал Евдокса, Евклида и других математиков древности. Здесь он познакомился с астрономом и математиком Кононом Самосским, его учеником Досифеем и математиком Эратосфеном. С ними Архимед впоследствии вел научную переписку.

Конон Самосский известен по легенде с «волосами Вереники». Дочь киренского царя Вереника была женой правившего с 247 г. до н. э. Птолемея III Евергета. Когда Евергет отправился в поход в Сирию, Вереника, ради благополучного возвращения мужа, принесла в дар богам свои волосы. После того как Евергет вернулся, обнаружилась пропажа волос из храма. По повериям тех времен, злоумышленник, похитивший волосы, колдуя над ними, мог принести Веренике смерть. Евергет был взбешен. Узнав о происшедшем, Конон Самосский явился к царю и заявил, что волосы вознесены богами на небо и образовали вновь открытое им созвездие «Волосы Вереники».

Личность Архимеда обросла легендами. Всем известна история открытия закона о гидростатическом давлении, когда Архимед, после внезапного озарения во время принятия ванны, выбежал на улицу с криком «Эврика!» Рассказывается, как он разоблачил ювелира, скрывшего часть золота при изготовлении венца для царя Гиерона. Было и такое: по приказу Гиерона в подарок царю Египта был построен роскошный корабль «Сиракосия»; все жители города не могли спустить его на воду. Гиерон обратился к Архимеду,

и тот сконструировал машину, при помощи которой Гиерон (или Архимед?) одним движением руки сумел выполнить необходимую работу. Все знают знаменитую фразу Архимеда: «Дайте мне точку опоры, и я подыму весь мир», а также обращение к ворвавшемуся в его дом завоевателю: «Не трогай моих чертежей!»

Но больше всего рассказов, связанных с обороной Сиракуз. Однако здесь много противоречивого, и авторы давних и последующих описаний происходившего вступают в полемику, приводя различные аргументы. Оставим споры на долю историков науки, нас интересует как бы обобщенный образ Архимеда. А его роль в том историческом эпизоде ясна: он организовал длительную оборону Сиракуз. Определенно также и то, что погиб он в 212 г. до н. э. от руки римлянина после падения города.

О завоевании Сиракуз писали Полибий, Плутарх, Тит Ливий, Диодор, Цицерон. И. Н. Веселовский считает наиболее достойной версию Полибия, изложенную им в восьмой книге «Истории» (до нас дошли полностью шесть книг и отрывки из последующих). Полибий жил непосредственно после Архимеда и был свидетелем многих событий, когда утверждалось господство Рима над Грецией и Македонией.

Покорение Сиракуз произошло во время второй Пунической войны. Сиракузы представляли собой сильно укрепленную крепость, оборону которой заранее подготовил Архимед на средства, предоставленные в его распоряжение Гиероном, умершим незадолго до осады Сиракуз.

Руководили римскими войсками Марк Клавдий Марцелл и Аппий Клавдий, осада происходила в 212 г. до н. э. (некоторые авторы указывают, что она продолжалась 2 года, с 214 до 212 г., другие — 8 месяцев). Полибий писал: «Римляне выбрали в проконсулы Аппия Клавдия, дали в его распоряжение сухопутные войска, а начальство над флотом возложили на Марка Клавдия. Начальники расположились станом не вдалеке от города и решили, что сухопутное войско поведет приступ против города со стороны Гексапил, а флот против Ахрадины у портика, именуемого Скитским, где стена тянется вдоль моря на собственном основании». Римляне «...не приняли в расчет искусства Архимеда, не догадались, что иногда дарование одного человека способно сделать больше, чем огромное множество рук.

Теперь они убедились в этом по опыту... Архимед заготовил внутри города, а равно и против нападающих с моря такие средства обороны, что защитникам не было нужды утруждать себя непредусмотренными работами на случай неожиданных способов нападения: у них заранее готово было все к отражению врага во всяких случаях»¹.

О каких средствах обороны шла речь? Это катапульты и камнеметательницы, выбрасывающие на значительные расстояния свинец, стрелы, камни различного размера весом до 10 талантов (более 250 кг); «клювы», содержащие в желобах свинец и камни и способные выдвигаться за крепостные стены, переворачиваться над скоплением неприятеля и опрокидываться; «журавлиные клювы», спускаемые на канатах и захватывающие носы кораблей, поднимающие и опрокидывающие их.

Аппий штурмовал город с суши, а Марцелл на 60 пятинальных судах — с моря. Осаждающие тащили с собой осадные орудия, лестницы, шалаши (подвижные крытые галереи), самбуки (машины, прикрепляющиеся к крепостным стенам). Обе атаки были успешно отбиты. Марцелл провел ночной штурм, и также безрезультатно: град стрел, пущенных «скорпионами» через амбразуры крепостных стен, парализовал действия римлян.

Марцелл, по словам Плутарха, недоумевал: «Как же мы будем воевать с этим Бриареем от геометрии, который нашими кораблями черпает море, разбил вдребезги наш штурмовой таран, и столько от него на нас летит снарядов, что и сторукому мифическому гиганту это было бы не под силу?» (Бриарей — в греческой мифологии сторукий гигант.) Так описывал Плутарх состояние Марцелла в «Жизни Марцелла». Солдат охватила паника: «Как только они замечали, что из-за крепостной стены показывалась веревка или бревно, то обращались в бегство с криком, что вот Архимед еще выдумал новую машину на их погибель».

Римляне, видя безуспешность прямого штурма, изменили тактику и начали осаду крепости, продолжавшуюся, по свидетельству Полибия, 8 месяцев. И в конце концов город пал. Архимед, погруженный в решение какой-то задачи и сосредоточенно рассматривавший чертежи, не слышал шума на улицах и не заметил ворвавшегося в дом воина. Римлянин потребовал, чтобы Архимед отравился с ним к Марцеллу,

но тот отказался, ссылаясь на то, что ему нужно найти решение задачи. Разозленный завоеватель выхватил меч и убил Архимеда.

Плутарх писал, что Марцелл сожалел о гибели Архимеда, великодушно разрешил родственникам и друзьям похоронить его и изобразить на могильной плите, по завещанию Архимеда, вписанный в цилиндр шар с указанием соотношения между их объемами. (Трудно поверить в благожелательное отношение жестоких римлян к побежденным.) Могила Архимеда была заброшена. Ее через 150 лет с трудом нашел в зарослях кустарника посетивший Сицилию ставший квестором Цицерон.

2

Архимед руководил конструированием и постройкой оборонительных машин (на современном языке — он был военным инженером при царе Гиероне), вел исследования по статике и гидростатике, математике, астрономии, оптике. Во время пребывания в Египте он изобрел кохлею, «архимедов винт» для подъема воды из источников при поливе полей. Архимед построил модель планетария — небесную сферу, позволяющую наблюдать восходы и заходы Солнца и Луны, их затмения, движение планет. Небесную сферу в качестве трофея взял Марцелл и передал ее в храм Доблести, где она хранилась до нашествия готов на Рим в 410 г. Цицерон видел небесную сферу Архимеда у Марка Марцелла, правнука Марцелла, и описал ее.

По утверждению римского архитектора Витрувия (I в. до н. э.), в утерянном сочинении «Катоптрика» Архимед изложил свои воззрения на особенности изображений в плоских, выпуклых и вогнутых зеркалах, на причины возникновения радуги; здесь же он сформулировал закон о равенстве углов падения и отражения.

Архимед — основатель статики и гидростатики. Он ввел понятие центра тяжести и определил положения центров тяжести многих фигур и тел, разработал теорию рычага. Ему принадлежит честь открытия закона о гидростатическом давлении и формулировка законов плавания тел. Характеризуя трактат Архимеда «О плавающих телах», Лагранж (1736—1813) писал: «Эта книга является одним из прекраснейших памятников гения Архимеда, она содержит в себе теорию

устойчивости плавающих тел, к которой современные ученые прибавили лишь очень немного» [22, с. 236].

Основным объектом исследований Архимеда была математика, в ней он достиг высочайших для своего времени вершин. Как уже говорилось, о полученных результатах он сообщал александрийским математикам. Поражает не только глубина мысли, но и стиль посланий, создается впечатление, будто разговаривает с тобой современник, будто он обращается не к Досифею, а к тебе. Вот, например, начало книги I «О шаре и цилиндре»:

«Архимед Досифею желает радоваться!

Я уже послал тебе записку наших открытий вместе с доказательством, что всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом одно и то же основание и одинаковую высоту; позднее, когда нам пришли на ум другие стоящие внимания теоремы, мы потрудились над их доказательствами. Теоремы эти таковы:

во-первых, поверхность всякого шара в четыре раза больше его большого круга;

затем, поверхность всякого шарового сегмента равна кругу, радиус которого равен прямой, проведенной из вершины сегмента к окружности круга, составляющего основание сегмента;

кроме того, для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой прямую, равную диаметру шара, и сам будет в полтора раза больше этого шара, и поверхность его тоже в полтора раза больше поверхности этого шара.

Конечно, эти свойства были и раньше по самой природе присущи упомянутым фигурам, но они все же оставались неизвестными тем, кто до нас занимался геометрией, и никому из них не пришло на ум, что все эти фигуры являются соизмеримыми друг с другом; поэтому я не колебался бы сравнить эти теоремы с теми, которые были открыты другими геометрами, и в частности с наиболее выдающимися теоремами, которые были установлены для тел Евдоксом, а именно, что всякая пирамида составляет третью часть призмы, имеющей с пирамидой одно и то же основание и одинаковую высоту, и что всякий конус составляет третью часть цилиндра, имеющего с конусом одно и то же основание и одинаковую высоту; действительно,

хотя эти свойства по самой природе всегда были при-
сущими указанным телам, но все же оказалось, что они
остались неизвестными многим жившим до Евдокса
знаменитым геометрам и ни одному из них не пришли
на ум. Теперь же их могут усмотреть все, имеющие
к тому силы. Было бы очень хорошо, если бы они
были обнародованы еще при жизни Конона; он был,
как мы считаем, наиболее способным продумать их
и дать о них подходящий отзыв. Полагая, что было бы
очень хорошо передать их сведущим в математике лю-
дям, мы посылаем тебе запись их доказательств; теперь
их могут рассмотреть все занимающиеся математикой.
Будь здоров!» [2, с. 95—96].

Доказанная Архимедом теорема о том, что объемы
цилиндра и вписанного в него шара относятся, как
 $3 : 2$, показалась ему настолько значительной, что он
завещал на своей могильной плите изобразить цилиндр
и шар, а в тексте указать отношение объемов их.

Иногда Архимед в своих посланиях формулировал
неверные теоремы, чтобы посрамить некоторых алек-
сандрийских математиков, выдающих чужие достиже-
ния за свои. В письме к сочинению «О спиралях» он
писал:

«Все эти задачи я хочу представить тебе одну за
другой, поскольку вышло так, что после тех задач,
которые не были мною решены, я прибавил еще две
задачи для того, чтобы тех, которые утверждают, что
они все открыли, и не приводят никаких доказательств
открытого, можно было бы уличить и заставить согла-
ситься с тем, что они открыли невозможное... Решения
всех вышеуказанных задач доставил тебе Гераклид,
а то, что было помещено после, было неверным» [2,
с. 228].

В подобной манере действовал почти через две ты-
сячи лет после Архимеда Ферма, предлагая конкурен-
там неразрешимые задачи. Это напоминает также лейб-
ницево «поцунать пульс у англичан».

3

Архимед усовершенствовал евдоксов метод исчер-
пывания и успешно пользовался им при доказательстве
многих теорем. Здесь и заложены начала интегральных
методов.

С помощью метода исчерпывания Архимед нашел,
например, следующие важнейшие результаты: площадь

сегмента параболы равна $\frac{4}{3}$ площади вписанного в него треугольника; объем шара равен учетверенному объему конуса, у которого основанием служит большой круг шара, а высотой его радиус; площадь поверхности шара равна учетверенной площади большого круга. Архимед применял метод исчерпывания не только для установления новых фактов, а и обоснования известных ранее, но не доказанных ².

Среди специалистов в области истории математики бытует установившееся мнение о том, что Архимед находил свои результаты механическим способом, а в посланиях александрийским математикам (в публикациях, по-теперешнему) давал доказательства с помощью метода исчерпывания, считая механический способ нестрогим. В этом проявилось влияние философии Платона. Если верить Плутарху, то вся практическая деятельность Архимеда по механике протекала вроде бы подпольно, настолько она была презираема и не укладывалась в каноны философии Платона. Плутарх писал: «Хотя эти изобретения заслужили ему репутацию сверхчеловеческой проницательности, он не снизошел до того, чтобы оставить какое-либо писанное сочинение по таким вопросам, а, считая низким и недостойным делом механику и искусство любого рода, если оно имеет целью пользу и выгоды, все свои честолюбивые притязания он основывал на тех умозрениях, красота и тонкость которых не запятнаны какой-либо примесью житейских нужд» ³.

С этими словами Плутарха согласиться нельзя. Механика служила Архимеду средством при получении математических результатов, математика в свою очередь нужна была Архимеду для обоснования разрабатываемых им механических теорий.

На применение механического способа при получении многих результатов указал сам Архимед в «Послании Эратосфену о механических теоремах», обнаруженном в начале нашего века. История редкая. Надо же: кажется, все открыто-переоткрыто, исследовано, и вот. В 1906 г. приват-доцент Петербургского университета Пападопуло-Керамевс в библиотеке одного из иерусалимских монастырей обнаружил позднехристианскую рукопись XIII в., написанную на пергаменте по сохранившемуся не совсем смытому греческому тексту X в. (такая рукопись называется палимпсестом) ⁴, который можно было через луну прочитать. Пападопуло-Кера-

мевс описал в каталоге библиотеки рукопись и привел выдержки из смытого текста. По ним профессор Копенгагенского университета Гейберг узнал Архимеда, восстановил его сочинение и вскоре издал. Так появилось «Послание к Эратосфену о механических теоремах», которое называют еще «Посланием о методе» и «Эфодиком» (в словаре «Суда» эфодик означает «руководство»).

Архимед писал: «Зная, что ты являешься, как я говорю, ученым человеком и по праву занимаешь выдающееся место в философии, а также при случае можешь оценить и математическую теорию, я счел нужным написать тебе и в той же самой книге изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем. Действительно, кое-что из того, что ранее мною было усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторые предварительные представления об исследуемом, а затем лаяти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная» [2, с. 299].

Дальше Архимед сообщал, что он публикует этот метод, желая осуществить прежние упоминания о нем и с целью помочь современным и будущим математикам в новых открытиях.

В «Эфодике» Архимед при вычислении площади параболического сегмента рассматривал его и соответствующий треугольник как «суммы отрезков», а объемы — как «суммы площадей». Он установил объемы шара и шарового сегмента, эллипсоида вращения, параболоида вращения, центров тяжести фигур и тел; рассмотрел задачу о нахождении объема «цилиндрического копыта» — тела, полученного при пересечении цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания, и «монастырского свода» — части пространства, отсекаемого двумя равными цилиндрами, оси которых перпендикулярны.

Объем «цилиндрического копыта» Архимед находил с помощью принципа рычага, после чего проводил геометрическое доказательство. Известный датский мате-

матик Г. Г. Цейтен (1839—1920) по этому поводу писал: «Введением к этому последнему доказательству служат рассуждения инфинитезимального характера, которые он вслед затем немедленно превращает в полное доказательство методом исчерпывания. Этот пример показывает нам, как вообще возникли его доказательства методом исчисления. На основании этого можно сказать: если отвлечься от геометрической формы, то вывод доказываемых таким образом теорем основывается на тех же соображениях, что и применение к тем же самым вопросам современного интегрального исчисления, но с той разницей, что Архимед, не обладая общепризнанным интегральным исчислением, вынужден в каждом отдельном случае обеспечить правильность доказательства тем, что он придает ему форму доказательства методом исчерпывания» [40, с. 131].

Поясним сущность механического метода Архимеда на двух примерах. Вот так он вычислял площадь параболического сегмента. Архимед определял площадь сегмента AOB с основанием $AB=2l$ и высотой $OF=h$ (рис. 1). Для простоты найдем площадь, заключенную между дугой параболы $y = ax^2$, осью Ox и прямой $x = l$. Это не будет значительным отклонением от рассуждений Архимеда. Рассмотрим рычаг CG длины $2l$ с точкой опоры O . На правом плече рычага пусть будет находиться фигура OBC ; разобьем ее на узкие полосы ширины Δx . На рисунке такая полоска KL расположена от начала координат на расстоянии x . Ордината KL будет ax^2 , поэтому площадь полоски приблизительно равна $ax^2 \cdot \Delta x$. Сдвинем эту полоску на конец рычага, в точку G , и подсчитаем момент ее относительно точки O ; найдем $l \cdot ax^2 \cdot \Delta x$. Уравновесим эту полоску полоской площади $MN \cdot \Delta x$, подвешенной к левой части рычага на расстоянии $OM = x$ от точки O . Ординату MN получим, если приравняем моменты полосок относительно точки O . Это даст: $x \cdot MN \cdot \Delta x = l \cdot ax^2 \cdot \Delta x$, $MN = alx$.

Поступим так с каждой полоской и получим на левом плече рычага ряд непрерывно распределенных полосок по всей длине его OC . Ординаты их пропорциональны x , поэтому концы полосок будут располагаться на прямой OND , при этом $CD = al^2$.

Размещенные таким образом по плечу OC рычага полоски, составляющие треугольник OCD , уравновесят сосредоточенную в точке G площадь фигуры OGB . Пло-

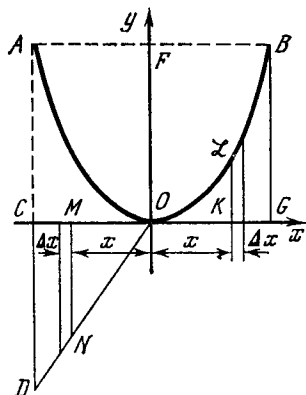


Рис. 1

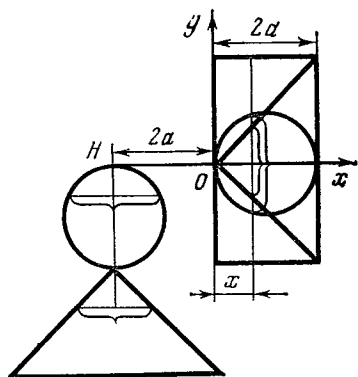


Рис. 2

щадь треугольника OCD равна $\frac{1}{2} al^2 \cdot l$; его центр тяжести находится от вершины O на расстоянии $2OC/3 = 2l/3$. Пользуясь тем, что рычаг находится в равновесии, приравняем моменты относительно точки O площади треугольника OCD и площади фигуры OGB , сосредоточенной в точке G . Получим $2l/3 \cdot al^2/2 \cdot l = Sl$, откуда $S = al^3/3$. Поскольку ордината точки B равна al^2 , искомая площадь будет $S = OG \cdot BG/3$.

Значит, площадь сегмента AOB параболы составляет $2/3$ площади прямоугольника $ABGC$, т. е. $4/3$ площади вписанного в сегмент треугольника, что и установил Архимед.

Еще пример — вычисление объема шара. Изложим процедуру, следуя венгерскому математику Д. Пойа (р. 1887) [32, с. 174—176]. Архимед рассматривал шар как тело, полученное при вращении окружности. Пусть эта окружность имеет радиус a и касается оси Oy в начале координат. Ее уравнение будет $x^2 + y^2 = 2ax$. При вращении вокруг оси Ox она описывает шаровую поверхность (рис. 2). Пойа замечает, что введение современной символики не нарушает идейного содержания построения Архимеда; может быть, даже помогает следить за ходом его мысли.

Величина πy^2 , полученная умножением y^2 на π , представляет собой переменное поперечное сечение шара. Демокрит, исследуя переменное поперечное сечение конуса, нашел его объем; возникает мысль переписать уравнение окружности так: $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$.

Величину πx^2 можно считать переменным поперечным сечением конуса, образованного при вращении вокруг оси Ox прямой $y = x$.

Преобразуем теперь последнее уравнение, умножив обе части его на $2a$:

$$2a (\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi (2a)^2. \quad (*)$$

Здесь πx^2 , πy^2 , $\pi (2a)^2$ — площади кругов, полученных при пересечении конуса, шара и цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси Ox и удаленной от начала координат на расстояние x . Шар, конус и цилиндр получаются при вращении вокруг оси Ox окружности $x^2 + y^2 = 2ax$, прямой $y = x$ и прямой $y = 2a$. Радиусы оснований цилиндра и конуса и высоты их одинаковы и равны $2a$.

Дальше Архимед поступает так. Он оставляет диск, представляющий собой поперечное сечение цилиндра, на месте, на расстоянии x от точки O , а диски радиусов y и x , т. е. сечения шара и конуса, подвешивает в точке H оси Ox на расстоянии $2a$ от точки O так, чтобы центры их располагались под точкой H . Представим теперь ось Ox как рычаг с точкой опоры O . Тогда уравнение (*) определит равенство моментов — момент двух дисков слева равен моменту одного диска справа, поэтому рычаг будет находиться в равновесии.

Если заставить x меняться от 0 до $2a$, то все поперечные сечения цилиндра «заполняют» весь цилиндр; одновременно поперечные сечения шара и конуса «заполняют» и эти тела. Следовательно, шар и конус, подвешенные в точке H , будут уравновешивать цилиндр. Тогда по закону рычага у этих тел должны быть одинаковые моменты относительно точки O . Обозначим искомый объем шара v ; объемы цилиндра и конуса известны, очевидна абсцисса центра тяжести цилиндра, поэтому из уравнения (*) получим уравнение моментов для всех трех тел:

$$2a [v + \pi (2a)^2 2a/3] = \pi (2a)^2 2a,$$

откуда $v = 4\pi a^3/3$.

Приведенные примеры, очевидно, не могут оставить равнодушными ни одного ценителя изящного в математике. Но они не содержат еще начал интегрального исчисления. Эти начала появляются, когда Архимед вводит аналоги сумм Дарбу.

Очень важным для становления интегрального исчисления было усовершенствование Архимедом идеи Демокрита о разбиении плоских фигур на элементарные полосы, «заполняющие» фигуры, и тела на слои, «заполняющие» их. Таких элементарных частей мыслилось бесконечное множество или конечное число. Этими действиями Архимед предварил идеи Кеплера и Кавальери в определении числовых характеристик различных геометрических объектов. У Кавальери даже некоторые выражения совпадают с теми, которые употреблял Архимед: оба говорили о всех липнях, заполняющих плоскую фигуру, и о всех плоских сечениях, заполняющих объем.

Метод интегральных сумм разработан Архимедом и применен к вычислению площадей и объемов в его сочинениях «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях». В предложении XIX книги «О коноидах и сфероидах» он видоизменил лемму Евдокса и этой формой пользовался впоследствии: «Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент какого-нибудь из сфероидов, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой заданной телесной величины» [2, с. 195].

Иллюстрация леммы чрезвычайно проста. Рассмотрим, например, сегмент параболоида вращения (рис. 3), разделим его высоту AO на n равных частей и образуем вписанную u_n и описанную v_n фигуры. Разность этих фигур будет равна объему нижнего цилиндра, т. е. $\pi \cdot OC^2 \cdot AO/n$, и ясно, что при большом значении n этот объем может стать меньше любого выбранного значения b .

Во введении к сочинению «О коноидах и сфероидах» Архимед установил неравенства

$$hn^2/2 < h + 2h + 3h + \dots + nh < (n+1)^2h/2.$$

Они получаются, если преобразовать сумму

$$h + 2h + 3h + \dots + nh = h(1 + 2 + 3 + \dots + n) = h(n+1)n/2.$$

Отсюда

$$hn^{2/2} < h(n+1)n/2 < h(n+1)^2/2.$$

В добавлении к теореме 10 о спиралях Архимед доказал теорему, приводящую к оценке

$$n^3h^2/3 < h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2 < \\ < (n+1)^3h^2/3.$$

В теореме 10 он установил, что

$$3[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2] = (n+1) \times \\ \times (nh)^2 + h(h+2h+3h+\dots+nh).$$

Положим $h=1$ и обозначим сумму квадратов натурального ряда через s . Можно поступить так:

$$(n+1)n^2 = n^2 + [(n-1)+1]^2 + [(n-2)+ \\ + 2]^2 + \dots + [2+(n-2)]^2 + [1+(n-1)]^2 + \\ + n^2 = 2s + 2(n-1) + 4(n-2) + 6(n-3) + \dots \\ \dots + 2(n-1) \cdot 1.$$

Прибавим к левой и правой частям

$$n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1.$$

Тогда в правой части будет

$$2s + n + 3(n-1) + 5(n-2) + \dots + 2(n- \\ - 1) \cdot 1.$$

Эта сумма равна $3s$, что видно из равенств

$$n^2 = n + 2(n-1 + n-2 + \dots + 1), \\ (n-1)^2 = n-1 + 2(n-2 + n-3 + \dots \\ \dots + 1), \\ (n-2)^2 = n-2 + 2(n-3 + n-4 + \dots \\ \dots + 1).$$

В левой части получим

$$(n+1)n^2 + (n+n-1+n-2+\dots+1) = \\ = (n+1)n^2 + (1+n)n/2 = (1+n)n(n+ \\ + 1/2) = n(n+1)(2n+1)/2.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^n (kh)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)h^2}{6}.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} n^3 h^2 / 3 &< h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2 < \\ &< (n+1)^3 h^2 / 3. \end{aligned} \quad (**)$$

Умножим все части выражения (**) на h ; получим

$$\frac{n^2 h^3}{3} < \sum_{k=1}^n (kh)^2 h < \frac{(n+1)^3 h^3}{3}.$$

Обозначим $nh = a$ и запишем

$$\frac{a^3}{3} < \sum_{k=1}^n (kh)^2 h < \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{n} + \frac{a^3}{n^2} + \frac{a^3}{3n^3}.$$

Перейдем теперь к пределу при $n \rightarrow \infty$ и найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (kh)^2 h = \frac{a^3}{3}.$$

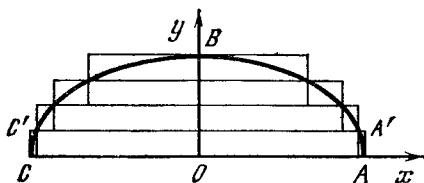
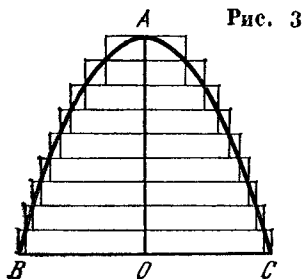
Фактически этими действиями вычислен интеграл

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Архимед применил полученную оценку при определении объемов сегментов коноидов и сфероидов, а также — вычислении площади, ограниченной витком спирали $\rho = a\theta$ и полярной осью.

Ознакомимся с действиями Архимеда на примере вычисления объема эллипсоида вращения (сфероида). Представим эллипсоид вращения с полуосями $OB = b$ и $AO = a$, так что ABC — половина его (рис. 4). Разделим высоту OB на n равных частей и построим описанную v_n и вписанную u_n фигуры, состоящие из цилиндров высоты $h = OB/n$. Разность $v_n - u_n$ может быть сделана как угодно малой, т. е. $v_n - u_n < \varepsilon$.

Необходимо найти объемы v_n и u_n . При отыскании их применим современную символику. Выберем систему координат так, как указано на рисунке. В сечении эллипсоида плоскостью Oxy получим эллипс $x^2/a^2 +$



$+ y^2/b^2 = 1$. Объемы цилиндров, образующих v_n , будут $\pi h x_0^2, \pi h x_1^2, \pi h x_2^2, \dots, \pi h x_{n-1}^2$. Из уравнения эллипса найдем величины $x_0^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2$: $x_0^2 = a^2 (b^2 - 0 \cdot h^2)/b^2$, $x_1^2 = a^2 (b^2 - h^2)/b^2$,

$$x_2^2 = a^2 [b^2 - (2h)^2]/b^2, \quad x_{n-1}^2 = a^2 [b^2 - (n-1)^2 h^2]/b^2.$$

Получим объем описанного тела

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \pi h x_k^2 = \frac{\pi a^2 h \left[n b^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (kh)^2 \right]}{b^2}.$$

С помощью неравенств (**) оценим v_n :

$$v_n > \pi a^2 h (n b^2 - n^3 h^2/3)/b^2 = \pi a^2 b (1 - 1/3) = 2\pi a^2 b/3, \quad v_n > 2\pi a^2 b/3.$$

Аналогично можно доказать, что $u_n < 2\pi a^2 b/3$.

В рассуждениях Архимеда вместо объемов элементарных цилиндров фигурируют отношения их к объему цилиндра $AA'C'C$. Руководствуясь неравенством $v_n - u_n < \varepsilon$ и полученными оценками, Архимед доказывает, что объем половины сфероида равен удвоенному объему конуса с теми же основанием и высотой, которые имеет сегмент, т. е. будет $2\pi a^2 b/3$. Справедливость равенства $V = Z = 2\pi a^2 b/3$ он доказывает от противного. Предположим, что $V < Z$. Тогда по сформулированной выше лемме можно описать и вписать фигуры v_n и u_n так, что будет $v_n - u_n < Z - V$, но $u_n < V$, поэтому $v_n - V < v_n - u_n < Z - V$, т. е. $v_n < Z$, что невозможно по полученной выше оценке. Пусть теперь $V > Z$. Построим такие v_n и u_n , чтобы было

$v_n - u_n < V - Z$, но $v_n > V$, поэтому следует, что и $u_n > Z$, а это невозможно, поскольку противоречит другой оценке. Значит, $V = Z$ и объем тела, полученного при вращении эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ вокруг оси Ox , будет $v = 4\pi a^2 b/3$.

В такой же мере решались Архимедом и другие задачи. Особо необходимо отметить вычисление им площади поверхности шара. Значимость этого достижения выступает более выпукло, если учесть, что вычисление площади искривленной поверхности выполнено в то время, когда находилось еще в зачаточном состоянии вычисление площадей плоских фигур.

В работе «Измерение круга» Архимед дал знаменитое приближение для значения отношения длины окружности к диаметру, числа π , $3^{10/71} < C/D < 3^{1/7}$.

Упомянем еще одну оригинальную математическую работу Архимеда — «Псаммит» («Исчисление песчинок»), в которой он построил систему счисления, пригодную для подсчета числа песчинок в объеме вселенной.

На этом мы расстаемся с величайшим Архимедом, оставив в стороне еще многие его достижения. Приведем лишь некоторые слова о нем. Английский математик Дж. Валлис (1616—1703) писал: «Муж поразительной проницательности, он заложил первоосновы почти всех открытий, развитием которых гордится наш век». А вот слова Д Аламбера (1717—1783): «За Архимедом сохранится репутация одного из самых удивительных гениев, которые когда-либо посвящали себя математике... Несмотря на преимущества новых методов, признаваемые всеми геометрами, всякий математик должен заинтересоваться, какими своеобразными путями и глубокими размышлениями Архимед мог достичь таких сложных результатов»⁵.

РАЗВИТИЕ ИДЕИ

1

Итак, впервые идею интегрирования мы находим в трудах Архимеда. Она возникла из нужд практики и никак не была свободным творением ума. Тут все ясно, и кривотолки по этому вопросу исключаются.

После третьего из великих математиков Древней Греции, создателя «Конических сечений» Аполлония, жившего приблизительно от 260 до 170 г. до н. э., в греческой математике начался период упадка. Это объясняется особенностями как общественного развития, так и самой античной математики.

В 212 г. до н. э. Рим завоевал Сиракузы, в 146-м — Грецию и Карфаген, в 64-м — Месопотамию, в 30-м — Египет. Многие города, в том числе и Карфаген, были разрушены. Покорение чужих земель сопровождалось уничтожением накопленных культурных ценностей. В 86 г. до н. э. Сулла захватил Афины и отдал город на три дня солдатам. Только когда пришла к нему делегация знатных афинян, он отменил приказ. Завоеванные земли превращались в колонии, управляемые римскими наместниками.

В 47 г. до н. э. Цезарь овладел Александрией; при этом сгорела большая часть библиотеки, неоднократно горевшей и впоследствии. Римляне считали, что им предназначено управлять миром, а науками и практикой должны заниматься покоренные народы — греки (так они презрительно называли греков), сирийцы и другие. Ничего не осталось похожего на *Musike* (храм муз) в Александрии. При более поздних правителях из Птолемеев ученые не пользовались поддержкой, как это было у первых царей династии. С приходом римлян условия научной деятельности еще более ухудшились.

Кроме внешних причин, обусловивших упадок математики, были и внутренние, присущие самой науке. Создатели античной математики слишком заботливо старались обеспечить доказательствам логическую безупречность. Это вело к тому, что устранились пояснения, способствующие пониманию существа; преклонение перед строгими формами затрудняло самостоятельное творчество последователей, и они редко выходили за рамки комментариев и компиляций. Геометрическая форма алгебры препятствовала развитию науки. Пока существовала в Александрии устная традиция преподавания математики, операции с геометрическими образами были слушателям доступны. После завоевания Александрии римлянами устное преподавание математики значительно сократилось, изучение геометрической алгебры по первоисточникам стало крайне затруднительным. Есть и еще одна при-

чина. Классические греки пренебрежительно относились к тому, что получалось нестрогими методами, и исключали из науки приближенные рассуждения, могущие удовлетворять запросам практики. Этим самым они изолировали созданную ими науку от практических нужд, лишив ее стимулов к развитию.

Господство римлян привело к расцвету мистицизма, появлению различных религиозных сект. Сформировавшееся христианство стало вести активное наступление на языческую науку и культуру. Учитель христианской церкви Тертуллиан (II в.) говорил: «Пам после Христа не нужна никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования». В 391 г. была сожжена значительная часть Александрийской библиотеки. В 415 г. толпа фанатиков-христиан растерзала язычницу — знаменитую Гипатию, математика, астронома, философа, комментатора Аполлония и Диофанта. Ее обвинили в выступлении против епископа Кирилла. Однажды, когда она возвращалась в повозке домой, на нее напали, притащили к церкви, сорвали с нее одежду и убили.

Даже слово «математика» связывалось с чем-то преступным. Так, один из законов византийского императора Юстиниана «О злоумышленниках, математиках и тому подобных» гласил: «Совершенно запрещается искусство математики», другой предписывал: «Да никто не совещается с гадателем или математиком». В 529 г. Юстинианом были закрыты афинские школы.

2

Изучение Архимеда, как и всей античной математики, было делом непростым: этим объясняется обилие комментариев и компиляций. В совершенствовании методов Архимеда существенного продвижения до Кеплера и Кавальери достигнуто не было. Некоторые результаты были получены Паппом. Он выполнил около пятнадцати известных ранее и новых квадратур и кубатур, ввел спираль на сфере и осуществил квадратуру, связанную со спиралью. Основным достижением Паппа служит высказанная им теорема, обычно называемая теоремой Гульдина (1577—1643): объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг лежащей в ее плоскости оси, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

После Паппа подробно комментировал Архимеда (и Аполлония) живший в VI в. Евтокий.

В IX в. методом исчерпывания овладели арабские математики и применили его для доказательства известных ранее результатов и нахождения новых. Сабит ибн Корра (836—901) в «Книге об измерении конического сечения, называемого параболой» видоизменил метод Архимеда и вычислил площадь параболического сегмента, разделив основание его на неравные части. В другой работе ибн Корра вычислял кубатуры тел, полученных от вращения частей параболы вокруг ее диаметра. Квадратура параболы была выполнена с помощью метода исчерпывания внуком ибн Корры ибн Синаном (908—946). Последователь ибн Корры ибн ал-Хайсам (965—1039) вычислил объем «параболической сферы».

Все это, вместе взятое, представляло незначительное движение вперед в развитии созданных Архимедом методов; однако не упомянуть о них нельзя, иначе может сложиться мнение, что за период от Архимеда до Кеплера, т. е. в течение почти 2000 лет, совершенно ничего сделано не было.

3

Сочинения Архимеда стали известны европейцам в XIII—XIV вв. В XVI в. П. Тарталья (1500—1557) издал труды Архимеда на латинском и итальянском языках. Переводы на латинский язык во второй половине XVI в. выполнили Ф. Мавролико (1494—1575) и Ф. Коммандино (1509—1575) и издали их со значительными комментариями и добавлениями. В 70-х годах XVII в. издал Архимеда П. Барроу (1630—1677); он проводил доказательства теорем на языке математики своего времени.

Этап в совершенствовании интегральных методов составила «Стереометрия винных бочек» И. Кеплера, опубликованная в 1615 г. Жизнь и творчество Кеплера протекали в период начала научной революции, становления научного мировоззрения, когда механика и математика играли ведущую роль.

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 г. в местечке Магсштадт, недалеко от г. Вейля (эта местность на юго-западе Германии тогда называлась Швабией). Отец его — малограмотный солдат в войсках герцога

Вюртембергского, происходил из старинной обедневшей дворянской семьи; мать — дочь трактирщика, не умела ни читать, ни писать. Детство Кеплера, как и вся его жизнь, протекало в стесненных материальных условиях. Но все же он успешно закончил школу, семинарию и поступил в Тюбингенский университет. В университете преподавались основы всех наук, в том числе астрономии и математики. Кеплер, ознакомившись на лекциях своего учителя М. Местлина (1550—1630) с системой Коперника, стал убежденным сторонником ее.

В 1593 г. Кеплер получил место профессора «математики и морали» в Граце, в Штирии. Здесь в 1597 г. он выпустил первую книгу по астрономии — «Введение к космографическим исследованиям или космографическая тайна», где предпринял неудачную попытку объяснить систему мира.

Кеплер не был атеистом. Он пытался примирить учение Коперника с религиозной традицией, найти ему соответствующее место в этой традиции. Гипотезы Кеплера направлены на то, чтобы разгадать планы бога при сотворении мира и увязать эти догадки с опытными данными. В работах Кеплера фантастически уживаются гениальные научные выводы и предвидения с числовой мистикой в духе пифагорейцев, музыкой небесных сфер, религиозными идеями.

В 1599 г. в Штирии возобновились гонения на протестантов, и Кеплер с женой вынужден был покинуть Грац. Через два года он получил приглашение в Пражскую обсерваторию к Тихо Браге. Тихо Браге умер в 1601 г., и Кеплер занял должность императорского астронома. Казалось, материальное положение Кеплера должно укрепиться, но достаточно приличное жалованье — 1500 флоринов в год — не выплачивалось годами, и ученый вынужден был зарабатывать на пропитание предсказаниями и составлением гороскопов, календарей, альманахов. Он писал: «Астрология — дочь астрономии, хотя и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду?».

Тихо Браге оставил после себя результаты многолетних наблюдений за движением Марса. Кеплер тщательно обработал их, изучил и издал в 1609 г. «Новую астрономию, или небесную физику по наблюдениям Тихо Браге», содержащую первый закон Кеплера об

эллиптических орбитах планет. Второй закон сформулирован в «Краткой коперниковой астрономии», опубликованной в 1618—1621 гг. Третий закон — в «Мировой гармонии...» (1619 г.).

В 1610 г. умерла жена Кеплера, оставив его с двумя детьми. В поисках заработка Кеплер переехал в Линц, где стал преподавать в школе. Здесь он женился вторично. 1615 г. был несчастлив для Кеплера: его мать обвинили в колдовстве и заключили в тюрьму. Процесс продолжался пять лет, Кеплер принял все возможные меры и в 1620 г., добившись освобождения матери, возвратился в Линц, но вскоре вынужден был его покинуть из-за враждебного отношения горожан к сыну «ведьмы».

Восемь лет Кеплер с семьей скитался по городам Германии. В 1628 г. он занял должность астролога у полководца Валленштейна. Осенью 1630 г. Кеплер отправился в Регенсбург хлопотать о выплате жалованья, в пути простудился и через неделю умер, 3 (15) ноября 1630 г. Хоронили его родственники, друзья, директор школы, пастор. «Имущество» Кеплера состояло из 22 эку, сильного платья, нескольких экземпляров книг. Он сочинил сам себе эпитафию, которая в переводе М. Я. Выгодского звучит так:

Я небеса измерял; ныне тени земли измеряю.

Дух на небе мой жил; здесь же тень тела лежит.

Полное собрание сочинений Кеплера, изданное в 1858—1871 гг., состоит из восьми больших томов.

Свой второй закон Кеплер сформулировал так: «Время, употребляемое планетой для перемещения от конца большой оси до произвольного ее положения, относится ко времени полного оборота, как сумма радиус-векторов, проведенных ко всем точкам дуги, к сумме радиус-векторов всего эллипса». Для нашего уха выражение «сумма радиус-векторов» звучит странно. Но с подобными словосочетаниями нам еще придется встретиться: знак интеграла введен Лейбницем в конце XVII в. как деформированная буква *S* — первая буква латинского слова *summa*. Смысл второго закона Кеплера состоит в том, что время движения планеты пропорционально площади, описываемой ее радиус-вектором.

Когда Кеплер обдумывал и обосновывал этот закон, он вынужден был обратиться к не решенной до

него задаче о вычислении площади сектора эллипса. Поясним ход рассуждений Кеплера в современных терминах. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах вычисляется по формуле

$$s = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta, \text{ где } \rho = f(\theta) \text{ — уравнение соответствующей кривой.}$$

Покажем, что метод, которым пользовался Кеплер, приводит к этой формуле. Определенный интеграл приближенно можно заменить интегральной суммой, т. е.

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta \cong \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \Delta\theta_i.$$

Разобьем дугу сектора на элементарные дуги (рис. 5). Произведение $\rho_i \Delta\theta_i$ дает длину элементарной дуги. Если кривая незначительно отличается от окружности и полюс лежит недалеко от центра ее (в случае планетных орбит так оно и есть), то различие между элементарными дугами $\rho_i \Delta\theta_i$ будет мало и им можно пренебречь, что Кеплер и делает. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 \Delta\theta_i = \sum_{i=1}^n \rho_i (\rho_i \Delta\theta_i) = \rho \Delta\theta \sum_{i=1}^n \rho_i,$$

т. е. площадь сектора пропорциональна сумме радиус-векторов.

Уже здесь видно существенное отличие методологии Кеплера от безупречной строгости Архимеда: большой объем выполненных вычислений сформировал у Кеплера принципы, позволяющие осуществлять инфинитезимальные операции; он пользуется ими, не то что пренебрегая методами древних, но молчаливо уходя от них. Впоследствии Кеплер напишет, что доказательства Архимеда он воспроизводит «... лишь настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию, а полные и во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах, если кто не убоится тернистого пути их чтения» [17, с. 109].

В 1615 г., как уже было сказано, выходит «Стереометрия винных бочек». Полное ее название «Новая стереометрия винных бочек преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». По словам Кеплера, поводом для написания «Стереометрии» было его наблюдение за спо-

Рис. 5

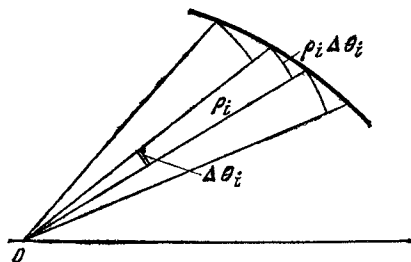


Рис. 6

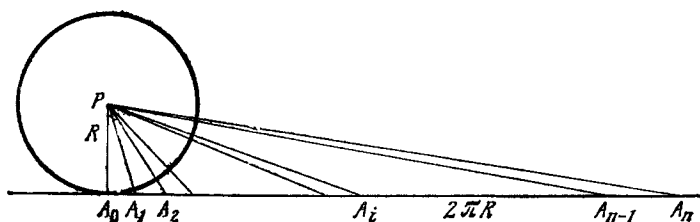
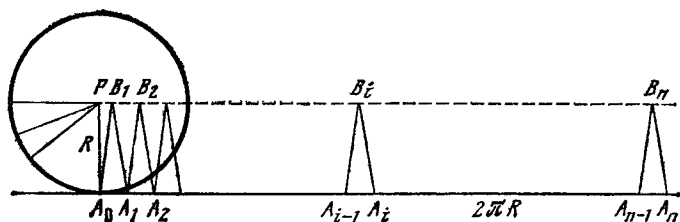


Рис. 7

собою измерения виноделами емкости винных бочек с помощью мерной линейки, когда Кеплер перед второй женитьбой закупал вино на свадьбу. Надо думать, не так внезапно сложились у него глубокие идеи, давшие импульс развитию понятия бесконечно малых и дальнейшему совершенствованию интегральных методов, «Стереометрия» состоит из трех частей: «Стереометрия правильных кривых тел» и «Дополнение к Архимеду»; «Специальная стереометрия австрийской бочки»; «Употребление всей книги о бочке». В первой части приводятся и доказываются результаты, найденные Архимедом, а также иные; Кеплер ввел новые тела и определил объем 87 таких тел. Он не пользовался методом исчерпывания, а исходил из инфинитезимальных

соображений. Вот характерный пример. При вычислении площади круга он разбивал круг на секторы, число которых предполагалось как угодно большим, так что площади их становились малыми (рис. 6). Затем Кеплер разворачивал окружность в отрезок A_0A_n ; при этом секторы образовывали на отрезке равнобедренные треугольники $A_0B_1A_1$, $A_1B_2A_2$, ..., $A_{n-1}B_nA_n$. Треугольники заменялись другими, с теми же основаниями, а все вершины стягивались в центр круга (рис. 7). Полученные треугольники равновелики соответствующим треугольникам $A_{i-1}B_iA_i$, но они целиком заполняют треугольник A_0PA_n . Круг равновелик прямоугольному треугольнику с катетами $2\pi r$ и r , т. е. площадь круга равна πr^2 . Вот и все! Заключив рассуждения словами о том, что сумма площадей секторов круга равна площади треугольника, Кеплер добавил: «Это самое и имеет в виду Архимедово приведение к нелепости» (т. е. доказательство от противного. — В. II.)¹.

В такой же манере Кеплер доказал многие предложения античных авторов. «Дополнение к Архимеду» он начал так: «До предыдущих результатов дошли Архимед и другие геометры, исследуя природу и размеры определенных прямолинейных и криволинейных фигур и тел, образованных простейшим способом с их помощью. Но так как фигура бочки отступает несколько далее от правильных тел, то я счел, что сделаю полезное дело, если сопоставлю для обозрения как бы на одной таблице способ образования этой фигуры и ей родственных, а также и степень их родства с правильными телами как для большей ясности дальнейших доказательств, так и для того, чтобы возбудить творчество геометров настоящего времени, и, распахнув ворота в обширнейшее поле геометрии, как глашатай, возведу, что там остается доделать и что вновь открыть».

Необходимо сказать, что рукопись, содержащая предыдущие результаты (доказательства известных ранее фактов), пролежала у издателя 16 месяцев, и Кеплер решил издать ее сам, «несмотря на большой недостаток средств», пополнив ее, на что ушло некоторое время, но Кеплер не жалел его, «так как никоим образом невозможно, чтобы пожал плод бессмертия труд, не посеявший некоторого времени».

В «Дополнении к Архимеду», которое Кеплер считал «головой и сердцем всего рассуждения», он ввел

тела, образуемые вращением конических сечений (окружности, эллипса, параболы и гиперболы) вокруг различных осей. Этим телам он давал названия — лимон, веретено, яйцо, оливка, кольцо, слива, айва и др. Если вращается, например, окружность вокруг диаметра, то получается шар; при вращении ее вокруг оси, не пересекающей окружности и лежащей в той же плоскости, в которой расположена и сама окружность, получается тор (его Кеплер называл кольцом); когда ось вращения касается окружности, при вращении образуется суженное кольцо; яблоко будет, когда ось пересекает окружность за центром ее, а вращается больший сегмент круга; лимон можно получить в случае, если ось пересекает окружность перед центром ее, а вращается меньший сегмент. Кеплер отметил, что если бы все конические сечения были «так же просты, как круг», то было бы 20 тел вращения, но из-за неоднородности эллипса, гиперболы и параболы число их увеличивается до 92.

Кеплер нашел объемы большинства тел, относительно иных он высказал определенные суждения; некоторые из них оказались ошибочными. Иногда Кеплер обращался к геометрам, предоставляя им решать ту или иную задачу.

Он всюду пользовался инфинитезимальным методом. В теореме XVIII он доказал, например, что тор равновелик цилиндру, имеющему высоту, равную длине окружности, описанной центром вращающегося круга, и основание — меридиональное сечение тора. Доказательство строилось так. Меридиональными сечениями тор разбивался на бесчисленное множество «кружочков», толщины которых у внешних краев тора больше, чем у внутренних. Среднее арифметическое этих толщин равно толщине кружочка в его центральной части. Поэтому вместо кружочка, получаемого в сечении тора, можно взять элементарный цилиндр с высотой, равной толщине центральной части кружочка. Таким образом, тор и цилиндр, упоминаемые в теореме, разобьются на одинаковое число равновеликих частей, что и служит доказательством теоремы.

Кеплер предчувствовал, что со стороны математиков, строго придерживающихся традиции древних, его методы вызовут критику. Вслед за примером расчета отношения объема пустой части бочки к объему оставшейся жидкости (с целью «обпаруживания и избежания

покраж») он писал: «Аполлонии (геометры.— В. Н.), конечно, возразят, что даже и допуская такое вычисление объема конических сегментов, все же не удовлетворим различию в фигуре бочек... Я это, разумеется, знаю, а потому, чтобы удовлетворить и их, я отсылаю их к теореме XXX первой части; там Аполлонии если поищут, то найдут, как восполнить недостающие этому приему научные доказательства».

В теореме XXX, между тем, высказана задача, предлагаемая геометрам: «Найти величину частей лимона, оливки, сливы или веретена, отсеченных плоскостью, параллельной оси». Кеплер высказал некоторые общие соображения и заключил: «Представь же нам, Снеллий, гордость геометров нашего века, строгое решение этой и прочих задач, которые тут желательны. Если не ошибаюсь, это открытие приберегается для тебя, чтобы явился какой-нибудь Меценат, который, оценив блеск твоей удачи и побуждаемый признательностью, вознаградил бы тебя достойно твоему искусству, значительно увеличив твои средства, и воздал бы тебе за вычисленный лимон золотое яблоко».

Уверенный в своей правоте, Кеплер писал: «Мы же, до тех пор пока эту добычу принесут со своей охоты Аполлонии, придерживаясь хотя и недоказанных, но приближающихся к истине правил, будем...».

Хотя в «Стереометрии» Кеплер дал решение многих не решенных до него задач геометрии, написана она была для практических целей. «Ведь даже и изображение справедливости рисуется с весами как символом всех точных мер,— писал Кеплер в конце книги, обосновывая метод измерения бочки линейкой, — и забота о точности измерения относится к соблюдению этой добродетели, воздающей каждому свое. А так как она хранит и украшает государства и сама прекраснее всякого солнца, то пусть же от ее дружественного и ясного взора рассеются и отойдут как можно дальше все облачка ошибок».

Заканчивается книга следующими словами: «Мы ставили своей задачей открыть ошибки, допускаемые при измерении как целых бочек, так и опорожненной части, и показать в теоремах этой книги основания к опровержениям заблуждений. А так как сама истина, даже молча, способна противостоять шуму всех заблуждений, и наша книга, вначале едва состоявшая из десятка теорем, против ожидания разрослась, то

оставим их ошибки тем, кому они нравятся, а сами будем пользоваться нашими удобствами и пожелаем, чтобы хватало в достаточном количестве чем повеселиться без вреда для души и тела.

И, тысячу отмерив чаш,
Счет спутаем весь паш»³.

Как и предполагал Кеплер, критика его методов поступила, можно сказать, незамедлительно. Шотландский геометр, ученик Виета А. Андерсон (1582—1619)³, живший в Париже, уже в 1616 г. выпустил в свет книгу «Защита Архимеда». В ней он писал: «Не подобает, о Кеплер, поносить память досточтимого старца! Архимед никогда не постулировал возможности развертывать круг в треугольник, а ты присваиваешь себе право делать это, когда развертываешь свои яблоки в цилиндрическое сечение; какой ум может воспринять подобного рода превращения? Да, Архимед постулировал существование прямой линии, равной окружности круга, и в том, что такая линия существует в природе вещей, никто, как говорит Евтокий, не усомнится. Затем уже Архимед доказывает, что прямоугольный треугольник, составленный этой прямой и радиусом круга, равен кругу.

С таким же правом и ты мог бы постулировать существование цилиндрического сегмента, основание которого равно сегменту круга, вращением которого порождено яблоко, а наибольшая высота равна наибольшей окружности на поверхности яблока, а затем уже, исходя из постулированного допущения, доказать методом Архимеда, что этот цилиндрический сегмент равен твоему яблоку. Что о подобном твоему доказательстве Архимед никогда и не помышлял — этому подтверждением служит то кропотливое вписывание и описывание многоугольников для круга и многогранников для шара, которым он пользуется. По этому многотрудному пути пошел Архимед, пользуясь несравненно верными началами, чем твое превращение одних фигур в другие. Зачем же понадобилось тебе присваивать Архимеду это преобразование, совершенно ему чуждое?»⁴

Андерсон не был одиноким по отношению к Кеплеру: к его критике подключился упоминаемый ранее иезуит П. Гульдин, знавший Кеплера и состоявший

с ним в переписке. Через 5 лет после смерти Кеплера Гульдин издал первую книгу «О центре тяжести», в 1640 г. — вторую и в 1641 г. — третью и четвертую, в которых осуждал нестрогие методы Кеплера. Гульдин считал полученные Кеплером результаты ценными, но никак не одобрял методы Кеплера. «Я считаю, — писал Гульдин, — что этот кеплеров метод имеет большое значение для нахождения геометрических теорем и решения проблем, но я никогда не посоветую его для доказательства, если существуют другие средства, уже испытанные геометрами. Кто же, особенно если это человек, привыкший к обычным доказательствам Архимеда и Евклида, сможет воспринять этот метод превращения, особенно когда речь идет о вещах менее ясных? Я во всяком случае не имею желаний ломать себе, как говорится, голову или мозги».

Дальше Гульдин указал, что с критикой Кеплера в печати выступал Андерсон — «благороднейший и остроумнейший геометр». Но устно отзывы о методах Кеплера Гульдин будто бы слышал лишь отрицательные, что Кеплер «...очень мало заботится о чистоте и точности геометрии, полагается очень часто на аналогии и догадки, постоянно пользуется ненаучными умозаключениями и сверх того излагает все свои произведения невразумительно»⁵.

В некоторых утверждениях Гульдин прав: местами в «Стереометрии» есть ошибки, неверные формулировки. Они объясняются тем, что Кеплер часто пользовался «аналогиями», «заключениями по вероятности», которые, однако, не сопровождал доказательствами.

Опережая события, отметим, что в четвертой книге сочинения «О центре тяжести» Гульдин вместе со «Стереометрией» Кеплера подверг резкой критике «Геометрию неделимых» Кавальери. Представляет интерес то, что Гульдин нигде не упоминает Паппа, у которого была дана формулировка «теорем Гульдина». Интересно также и проводимое Гульдином доказательство теорем, напоминающее рассуждения Кеплера «по аналогии», которые он критиковал.

В «Шести геометрических опытах», вышедших после смерти Гульдина, Кавальери подробно ответил на возражения Гульдина и дал разработанным им методом строгое доказательство теоремы Гульдина. По словам Кавальери, это доказательство сообщил ему приятель, Антони Рокка, за два года до написания книги.

Критики Кеплера не увидели новизны его методологии, составившей значительный шаг в становлении интегральных методов.

4

Следующий этап в становлении интегральных методов составило творчество итальянского математика Кавальери. В отличие от Кеплера Кавальери искал общий принцип, на основе которого можно было бы решать различные вычислительные задачи.

Бонавентура Кавальери родился в 1598 г. в Милане, получил хорошее гуманитарное образование (иного в те времена и не было), владел латинским и греческим языками, знал древних авторов. Родители предназначали его к духовной карьере, и в 1613 г. Кавальери вступил в монашеский орден перонимитов, патроном которого считался св. Иероним. В 1616 г. Кавальери переехал в монастырь ордена, находящийся в Пизе, и продолжил образование под руководством ученика Галлея (1564—1642), математика и астронома Б. Кастелли (1577—1644), который высоко ценил Кавальери и познакомил его с Галилеем, охотно поддерживавшим с тех пор с Кавальери переписку (Галилей жил тогда во Флоренции).

Из некоторых писем Кавальери Галилею видно, что основные идеи разработанного им метода сложились у него в начале 20-х годов. В 1629 г. Кавальери успешно участвовал в конкурсе на должность профессора кафедры математики, занял ее и оставался профессором Болонского университета всю жизнь.

Кавальери покровительствовали почитатель точных наук епископ Д. Чамполи (ему Кавальери посвятил свою «Геометрию»), папа Урбан VIII, назначивший его пожизненным настоятелем монастыря св. Марии делла Маскарелла, папа Иннокентий X, сменивший Урбана VIII. Должность настоятеля монастыря снимала с Кавальери земные заботы, и это позволяло ему целиком отдаваться любимому делу — науке.

Основной труд Кавальери — «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» — издан в 1635 г. Здесь Кавальери изложил разработанный им метод неделимых. В 1647 г. вышли «Шесть геометрических опытов», содержащие ответы на критику метода Кавальери со стороны Гульдина и

уточнения основных понятий, введенных в «Геометрии».

Кавальери написал также несколько книг по астрономии, логарифмам, тригонометрии, оптике, руководство по астрологии.

Несмотря на широкое признание научных заслуг и высокое покровительство, Кавальери не чувствовал себя счастливым: он страдал жестокой подагрой, которая и свела его в могилу в возрасте около пятидесяти лет; кроме того, он ощущал внутреннюю неудовлетворенность вследствие того, что ему не удалось обосновать метод неделимых строгой логичной теорией.

Умер Кавальери 30 ноября 1647 г.

Книга Кавальери «Геометрия» обладает важными особенностями. В геометрии древних многие понятия распространялись на ограниченное число фигур и тел: о касании шел разговор лишь для случаев прямой и окружности, а также нескольких окружностей; высота определялась только у прямолинейных фигур; понятие основания не давалось вообще; вершина определялась только у конуса; подобие рассматривалось для прямолинейных фигур, конусов и цилиндров (Евклид) и конических сечений (Аполлоний); конусы и цилиндры изучались только круговые. Всего этого для целей античной математики было достаточно.

После введения Кавальери новых тел возникла необходимость многих обобщений. В первой книге «Геометрии» Кавальери дал новые понятия касательных, оснований, высот, вершин, подобия, конусов и цилиндров, доказал связанные с этим теоремы, обобщающие соответствующие теоремы древних. Кавальери писал: «Кроме прочего, я должен обратить особое внимание на максимальную всеобщность этого способа доказательства (с помощью неделимых.— *В. Н.*): в самом деле, то, что другие доказывают для одного или в лучшем случае для немногих видов тел, мы доказываем сразу для бесконечного числа видов. Так, например, здесь доказывается не только то, что цилиндр в три раза больше конуса или призма — пирамиды, если они имеют одни и те же основание и высоту; но, как бы мы ни изменяли форму основания (а число такого рода возможных изменений не может быть ограничено никаким определенным числом), тело, имеющее такое основание и названное нами цилиндрикой, будет в три раза больше того, которое имеет с ним общее основание и общую высоту и которое мы называем коникой. Впол-

не очевидно, что число видов таких тел бесконечно. По этому одному примеру... исследователь может понять, насколько геометрическая пива становится благодаря этому плодотворнее и обширнее. Такой же всеобщностью будут отличаться выводы почти относительно всех тел, рассматриваемых в этой книге» [16, с. 90—91].

Другая особенность «Геометрии» Кавальери состояла в том, что в ней более выпукло, опять-таки по сравнению с древними, выступали элементы аналитической геометрии, ставшие основой рассуждений Кавальери.

Основным понятием геометрии Кавальери служат неделимые. Они представляют собой объекты, природа которых отлична от природы бесконечно делимого геометрического континуума. Например, при рассмотрении конечной плоской фигуры, граница которой любой прямой пересекается не более чем в двух точках (если это не так, то фигуру следует соответствующим образом преобразовать), будем делить ее параллельными прямыми на полосы, предельным положением которых станут отрезки прямых; они и являются неделимыми. Точно так же следует поступать и в случае пространственного континуума, пересекая тело параллельными плоскостями. Таким образом, неделимыми линиями, имеющей одно измерение, будут объекты нулевого измерения — точки, неделимыми плоской фигуры (двух измерений) — отрезки прямых (одного измерения), неделимыми пространственной фигуры (трех измерений) — части плоскостей (двух измерений). При перемещении неделимые порождают соответствующие геометрические объекты: точка — линию, отрезок — плоскую фигуру, часть плоскости — тело. Прямые, пересекающие плоскую фигуру, или плоскости, пересекающие тело, должны быть параллельны некоторой прямой (плоскости), называемой регулой (направляющей).

Кавальери доказал, что совокупности «всех линий» в случае равновеликих фигур, а также «всех плоскостей» для равновеликих тел равны, независимо от того, по каким регулам они берутся. Он доказал также, что «фигуры относятся друг к другу, как все их линии, взятые по любой регуле, а тела, как все их плоскости, взятые по любой регуле» [16, с. 209].

Сравнение площадей плоских фигур Кавальери производил сравнением «всех линий» (*omnes lineae*).

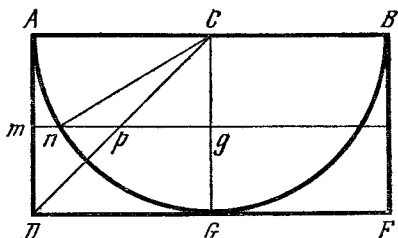


Рис. 8

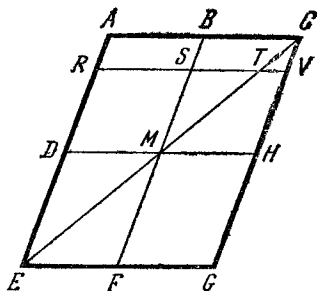


Рис. 9

Точно так же он поступал и с объемами. Он писал: «...для нахождения отношения между двумя фигурами или телами достаточно найти отношение всех линий (в фигурах) или всех плоскостей (в телах), взятых по любой регуле. Это основное положение моей новой геометрии, здесь излагаемой» [16, с. 211].

В седьмой книге «Геометрии» Кавальери доказал теорему о том, что объемы двух тел или площади двух плоских фигур будут равны, когда равны между собой площади или длины всех соответствующих сечений, параллельных одной и той же плоскости или прямой. Это предположение вошло под названием принципа Кавальери в учебники по геометрии, в том числе в учебник А. П. Киселева (1852—1940), добротню служивший нашей школе до недавнего времени.

Неизвестные объемы тел и площади фигур Кавальери получал сравнением с известными. Таким способом он нашел большое число известных до него результатов, а также новые. Он доказал, например, известную теорему о том, что площадь параллелограмма в два раза больше площади отсеченного от него диагональю треугольника, привел обобщение теорем об отношении площадей и объемов подобных в его смысле фигур и тел, вычислил объемы более 20 введенных Кеплером тел, площадей, ограниченных различными витками спирали Архимеда и окружностями, объемы некоторых тел, полученных при помощи спирали.

Ознакомимся с методом Кавальери в действии на примере вычисления объема чаши. Пусть фигура $ACGD$ (рис. 8) вращается вокруг оси CG ; фигура ADG тогда образует «чашу», а треугольник CDG — конус. Проведем плоскость, параллельную основанию чаши DGF . Она пересечет чашу по кольцу, а конус — по

кругу. Докажем, что площади этих неделимых конуса и чаши равны.

В прямоугольном треугольнике Cng квадрат длины гипотенузы Cn равен сумме квадратов длин катетов ng и Cg , поэтому и площади кругов, построенных на этих линиях как на радиусах, будут связаны такой же зависимостью. Заметим, что $Cn = mg$ (Cn — радиус круга, равный AC), $Cg = pg$, значит, $S_{кр\ mg} = S_{кр\ ng} + S_{кр\ pg}$. Вычтем из обеих частей равенства $S_{кр\ ng}$ и получим, что площадь кольца равна площади сечения конуса.

Равенство неделимых справедливо для любых сечений, параллельных основанию чаши, по теореме Кавальери оно будет справедливым и для совокупностей площадей сечений. Отсюда следует равенство объемов конуса и чаши. Если высота конуса равна r (радиусу шара), то объем его будет $\pi r^3/3$. Таков же и объем чаши⁶.

Эта задача впервые была выдвинута Лукой Валерио (1552—1618) в 1604 г., а затем применена для иллюстрации метода неделимых Кавальери и Торричелли.

Заметим здесь же, что Галилей воспользовался равенством любых сечений чаши и конуса и отнес его также к предельному случаю сечения AB . Получилось, что окружность, состоящая из бесконечного числа точек, «равна» одной точке — центру. Из этого затруднения Кавальери пытался выйти, исключив из рассмотрения крайние неделимые.

Квадратуры и кубатуры, выполненные Кавальери в «Геометрии», представляют собой по современной терминологии интегралы от многочленов второй степени. Немецкий математик Г. Вилейтнер (1874—1931) характеризует достижения Кавальери так: «Крупный шаг вперед, сделанный Кавальери по сравнению с Кеплером, состоял, не говоря о более систематической трактовке вопроса, в том, что он не ограничился применением совокупностей всех прямых плоской фигуры, а перешел к вычислению совокупности квадратов всех прямых. После того как Кавальери показал, что в подобных треугольниках эти суммы квадратов относятся как кубы сходственных сторон, он доказывает теорему: „совокупность квадратов всех отрезков параллелограмма, параллельных одной из его сторон, втрое больше совокупности таких же отрезков в треугольнике, отсекаемом в параллелограмме его диагональю“» [8, с. 103—104].

Доказательство теоремы можно построить так. Найдём отношение между суммой квадратов «всех» отрезков RT , параллельных стороне AC , в треугольнике AEC и суммой квадратов «всех» отрезков RV , отсекаемых теми же прямыми в параллелограмме $ACGE$ (рис. 9). Обозначим $RT = x$, $TV = y$, $RS = b = a/2$, $ST = z$. Тогда $x = b + z$, $y = b - z$, $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$.

Будем перемещать прямую RV от положения AC в положение EG . Получим суммы «всех» квадратов отрезков в различных фигурах. Обозначим сумму квадратов Σ и запишем

$$\Sigma AEC + \Sigma EGC = 2\Sigma AF + 4\Sigma BMC,$$

$$\Sigma AEC = \Sigma AF + 2\Sigma BMC.$$

Здесь учтено то, что отрезок $ST = z$ входит в два треугольника — BMC и EMF , кроме того, $\Sigma AEC = \Sigma EGC$.

По следствию из теоремы 22 суммы всех квадратов двух подобных треугольников относятся как кубы сходственных сторон, поэтому $\Sigma BMC = \frac{\Sigma AEC}{8}$,

а также $\Sigma AF = \frac{\Sigma AG}{4}$. С учетом этих соотношений получим $\Sigma AG : \Sigma AEC = 3 : 1$. Этот результат означает, что

$$\int_0^a a^2 dx : \int_0^a x^2 dx = 3 : 1, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^a x^2 dx = a^3/3.$$

С помощью доказанной теоремы Кавальери получил объёмы пирамиды и конуса, площадь параболического сегмента. Таким образом, Кавальери, по существу, вычислял интегралы $\int_0^a x dx$, $\int_0^a x^2 dx$, которыми оперировали также Архимед и Кеплер (они нашли, кроме того, соотношения, эквивалентные $\int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = 1 - \cos \alpha$).

Интеграл $\int_0^a x dx$, дающий площадь треугольника, вычислял и Галилей при определении пройденного падающим телом пути.

Изложенные в «Геометрии» методы Кавальери совершенствовал в последующие годы. В частности, он рассмотрел задачу о вычислении объема тела, образованного при вращении сегмента параболы вокруг хорды, перпендикулярной оси параболы (его Кеплер называл параболическим веретеном; в современных задачах по математическому анализу для вузов его называют лимоном Кавальери). Кеплер решил задачу приближенно. Как уже упоминалось, точное вычисление объема этого тела было выполнено ибн ал-Хайсамом более чем за 500 лет до Кавальери; он установил, что объем веретена равен $8/15$ объема описанного около веретена цилиндра. Об этом ни Кеплер, ни Кавальери не знали.

Полученный ранее результат о сумме квадратов «всех» линий Кавальери распространил на суммы четвертых степеней. В предисловии к четвертому «Опыту» книги «Шесть геометрических опытов», опубликованной в Болонье в 1647 г., Кавальери писал: «Тогда я восстановил в памяти предложение XIX книги II моей «Геометрии», в силу которого все линии названного параллелограмма вдвое больше всех линий названного треугольника, и предложение XXIV, в силу которого все квадраты первого втрое больше всех квадратов второго. Чтобы не образовалось пробела между квадратами и квадрато-квадратами (т. е. четвертыми степенями.— В. Н.), я приложил старание к нахождению также и отношения всех кубов параллелограмма ко всем кубам указанного треугольника и обнаружил, что оно равно отношению 4 к 1. Так что в конце концов я с превеликим удивлением постиг, что все линии относятся, как 2 к 1, все квадраты, как 3 к 1, все кубы, как 4 к 1, все квадрато-квадраты, как 5 к 1, и т. д., на основании чего я утверждал, что все квадрато-кубы должны относиться, как 6 к 1, все кубо-кубы, как 7 к 1, и так далее, согласно натуральному ряду чисел, расположенных по порядку, начиная от единицы» [16, с. 287—288].

Все это означает, что вычислены интегралы

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}, \quad \int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}, \dots$$

$$\dots, \int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Этот вывод Кавальери поместил также в «Ста различных задачах», вышедших еще в 1640 г., более того, Кавальери сообщил о нем Галилею в письме в 1637 г. Он доказал свое утверждение для $n = 1; 2; 3; 4$. Случаи $n = 5; 6$, по словам Кавальери, рассмотрел парижский геометр Жан Богран, приславший ему свое доказательство.

Кавальери распространил рассуждения на любые натуральные значения n и по неполной индукции полу-

чил
$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Необходимо отметить, что к такому же результату пришли в 1629 г.

Ферма и в 1634 г. Роберваль, но они о своих открытиях сообщали лишь в переписке.

В «Шести геометрических опытах» Кавальери изложил некоторые уточнения метода неделимых, поместил ответы на критику Гульдина и привел доказательство методом неделимых теоремы Гульдина, о чем уже упоминалось. Доказательство представляет интерес, поэтому стоит его привести. Теорема Гульдина состоит в том, что объем тела, образованного при вращении замкнутой фигуры вокруг не пересекающей ее оси, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

Итак, вот доказательство Кавальери. Предположим, что фигура $ABCDE$ вращается вокруг оси AE (рис. 10). Ось вращения составляет часть контура фигуры, и прямые BH , CG , ... пересекают контур (кроме оси) по одному разу. Объем полученного тела будет пропорционален сумме площадей «всех» ординат, квадрат же каждой ординаты пропорционален статическому моменту ее относительно оси вращения. Получается, что объем тела вращения пропорционален сумме моментов «всех» ординат, т. е. моменту центра тяжести, который равен произведению площади фигуры на расстояние OG от центра тяжести до оси вращения. Этот объем пропорционален и произведению площади фигуры на длину окружности, радиус которой равен OG . О равенстве его этой величине можно судить из

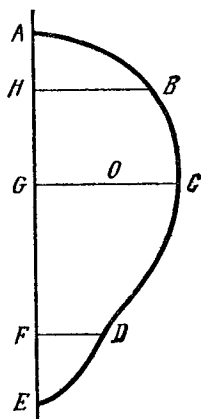


Рис. 10

того факта, что для цилиндра это равенство справедливо.

Понятие неделимых вызывало у современников Кавальери различные толкования. Роберваль, например, определял их как бесконечно малые того же измерения, что и изучаемый геометрический объект. Галилей, по утверждению исследователей его творчества, сам собиравшийся написать труд о неделимых, рассуждал так: если неделимые имеют толщину, то они должны делиться и дальше; если же толщины у них нет, то их бесконечно много, и результат сложения неделимых будет бесконечно большим.

Кавальери чувствовал слабость трактовки неделимых — основы метода. Иногда он возмущался нападками философов («чистые философы суют свой нос во многие вопросы»), заявлял, что строгость — забота философов, а не геометров, оправдывал свой метод тем, что если бы он был ошибочным, то хотя бы раз привел его к неправильному результату. Кавальери своим методом доказал многие результаты Евклида и Архимеда, причем его выводы точно совпадали с их выводами. «Ни разу мы не пришли к выводу, который хотя бы на ширину ногтя отличался от вывода других», — писал Кавальери. Впрочем, он замечал, что иногда из ложных предпосылок ложными умозаключениями можно прийти к верным результатам.

Нужно сказать, что аналогичное состояние наблюдалось в математике нередко, когда успешно применялись новые методы, не получившие еще достаточного обоснования. И высказывания математиков были соответствующие. Б. Паскаль утверждал, «что не логика, а приличествующая случаю ясность достаточна для правильных умозаключений» [13, с. 138]. Д'Аламбер выдвинул лозунг — шагай вперед, уверенность придет потом.

Отсутствие ясности в понимании неделимых подтверждают следующие слова Кавальери: «...непрерывное *либо* не что иное, как сами неделимые, *либо* что-то иное, чем неделимые. Если непрерывное тождественно с неделимыми, то, разумеется, если их совокупности не могут быть сравнимы, то не могли бы быть сравнимы и пространства или непрерывные, поскольку сделано допущение, что они тождественны с самими неделимыми. *Если же* непрерывное есть что-то иное, чем сами неделимые, то необходимо признать, что это-то иное и рас-

положено в промежутках между неделимыми. Итак, это непрерывное состоит из ряда составляющих его частей, число которых неограниченно, так как логически необходимо, чтобы это «что-то другое» лежало между каждыми двумя неделимыми. Если же это так, то окажется, что невозможно сравнивать между собой и самые непрерывные, или, что то же, пространства, поскольку те части, из которых составлено непрерывное... неограниченны по числу. А утверждать, что пространства, ограниченные определенными пределами, не могут быть сравнимы между собой, нелепо... Итак, *независимо от того*, состоит ли непрерывное из неделимых или не состоит, совокупности неделимых сравнимы между собой и величины их стоят в определенном отношении друг к другу» [16, с. 207].

Несмотря на все имеющиеся недостатки (к ним относится также и то, что Кавальери, следуя традиции древних, пренебрегал уже значительно развившимися к тому времени алгебраическими методами), «Геометрия» Кавальери оказала существенное влияние на современных и последующих математиков вплоть до Лейбница и Ньютона. Лейбниц писал: «Галилей и Кавальери впервые стали разоблачать сокровеннейшие приемы Архимеда». Ньютон признавал, что происхождение геометрических величин рассматривал по Кавальери. Валлис считал себя учеником Кавальери. В письме Леопольду Тосканскому он писал 9 ноября 1670 г.: «Метод неделимых, созданный Кавальери, счастливо усовершенствовал и изъяснил ваш Торричелли; не мне судить, каким дальнейшим усовершенствованиям подверглось это учение в моей арифметике неделимых»⁷.

Гимном геометрии Кавальери прозвучали слова Торричелли: «Несомненно, геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономности средство для нахождения теорем и дает возможность подкрепить огромное число, казалось бы, неразрешимых теорем краткими, прямыми, наглядными доказательствами, что невозможно сделать по методу древних. Это — истинно царская дорога среди зарослей математического терновника; ее первым из всех открыл и выровнял для общественного пользования изобретатель удивительной мудрости Кавальери... Метод Кавальери является действительно научным способом доказательства, всегда ведущим путем прямым и свойственным самой природе. Жаль мне древней геометрии, что она либо не

знала, либо не хотела признавать учения о неделимых» [52, с. 56].

И еще: «Новая геометрия неделимых переходит из рук одних ученых к другим как чудо науки; она убедила мир, что века Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки».

Этими словами и закончим ознакомление с вкладом Кавальери в развитие идеи интеграла и всей математики.

5

Страстным приверженцем метода неделимых был Эванджелиста Торричелли. Он родился 15 октября 1608 г. в г. Фаэнце, расположенном в 50 км от Болоньи и в 100 км от Флоренции с их знаменитыми университетами. Отец его, Гаспаро Торричелли, умер, когда дети были маленькими, и заботу о них принял на себя брат отца, настоятель бенедиктинского монастыря св. Джованни в Фаэнце, о. Джаконо. Дядя поместил Эванджелисту в незадолго до этого открывшуюся иезуитскую школу в Фаэнце. В школе проявились выдающиеся способности Эванджелисты, и дядя решил, что племянник должен продолжить образование.

Выше уже упоминался учитель Кавальери в Пизе — Б. Кастелли. Папа Урбан VIII перевел Кастелли из Пизы в Рим, где Кастелли стал преподавать в университете. Джаконо был знаком с Кастелли, и это определило выбор учебного заведения для Эванджелисты: восемнадцатилетний Торричелли переступил порог университета в Риме и принялся за науки под руководством Кастелли вместе с другими талантливыми его учениками. Они изучали астрономию, математику, механику, новую работу Галилея «Диалог о двух главнейших системах мира», вышедшую в январе 1632 г. Торричелли и здесь выдвинулся среди учеников, и Кастелли сделал его своим личным секретарем. По поручению учителя Торричелли ведал его перепиской и стал писать Галилею. В одном из писем он сообщал, что после иезуитской школы вот уже 6 лет учится у «досточтимого отца» Кастелли, знает древних геометров — Евклида, Архимеда, Аполлония, астрономов — Птолемея, Тихо Браге, Кеплера, Коперника, изучает «Диалог». Заключил письмо Торричелли заверением, что он — убежденный сторонник учения Галилея (им он и оставался всю жизнь).

После осуждения инквизицией в 1633 г. Галилей поселился в Арчетри, близ Флоренции. В апреле 1641 г. его посетил Кастелли и ознакомил с рукописью Торричелли о движении свободно падающих тел.

Кастелли был озабочен пошатнувшимся здоровьем Галилея и рекомендовал Торричелли в помощники Галилею. Так в октябре 1641 г. Торричелли оказался в Арчетри, в доме Галилея, и стал вести записи мыслей

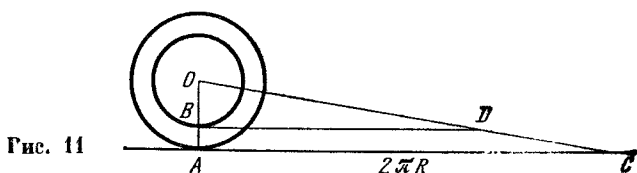


Рис. 11

Галилея, вошедших впоследствии в «День пятый» и «День шестой» знаменитых «Бесед и математических доказательств». Всего три месяца продолжалось сотрудничество Торричелли и Галилея: 8 января 1642 г. Галилей скончался. Великий герцог Тосканский, прибывший в Арчетри в связи со смертью Галилея, предложил Торричелли освободившуюся должность «философа и первого математика великого герцога Тосканского», которую Торричелли и занимал до своей смерти, последовавшей 25 октября 1647 г. Было ему всего 39 лет.

Существенное усовершенствование метода неделимых, выполненное Торричелли, состояло в том, что он наряду с прямолинейными неделимыми более часто применял для плоских фигур дуги кривых, а для тел ввел искривленные поверхности. Вот как решал он задачу Кеплера о вычислении площади круга обобщенным методом неделимых. Пусть дан круг радиуса R ; на касательной к окружности в точке A отложим отрезок $AC = 2\pi R$ (рис. 11). Возьмем произвольную точку B на радиусе OA и проведем окружность радиуса OB с центром в точке O . Через точку B проведем прямую BD , параллельную AC . Из подобия треугольников OAC и OBD следует, что длина отрезка BD равна длине окружности радиуса OB . Значит, системе неделимых круга — окружностей соответствует система неделимых треугольника OAC — отрезков прямых. На основании принципа неделимых Торричелли сделал вы-

Достижения Торричелли поражали самого создателя метода неделимых — Кавальери. По случаю вычисления объема «острого гиперболического тела» Кавальери писал Торричелли: «Точно так же я благодарю Вас за доказательство об остром гиперболическом теле — доказательство воистину божественное. Я не в силах постигнуть, как Вы решились с такой легкостью погрузить Ваш мерный шест в бесконечные глубины этого тела, ибо воистину оно мне кажется бесконечно длинным» [16, с. 410].

Торричелли исследовал и общий случай гипербол $x^m y^n = k$ и установил, когда у тела вращения будет конечный объем, т. е. условия существования несобственного интеграла.

Он получил и другие значительные результаты в математике. Независимо от Декарта (1596—1650) Торричелли исследовал логарифмическую спираль $\rho = ae^{-b\theta}$, произвел ее спрямление, иными словами, указал способ сравнения «любой части дуги этой спирали» и «всей целиком» с отрезками прямых.

Независимо от Роберваля и Ферма он произвел квадратуры гипербол и парабол, задаваемых уравнениями $y^n = kx^{\pm m}$. Торричелли исследовал также спирали высших порядков $\rho^n = k\theta^m$ и логарифмическую кривую $x = k \log y$, нашел площадь, ограниченную кривой, ее асимптотой и некоторой ординатой, и объем соответствующего тела вращения⁸. Эти результаты, полученные в 1646—1647 гг., Торричелли намеревался изложить в сочинении «О новых линиях», но не успел. Они увидели свет лишь в 1919 г. В рукописях же они были известны итальянским математикам, знали о них Дж. Грегори (1638—1675), Барроу и др. Трудно судить о влиянии на развитие математики неопубликованных математических открытий Торричелли, ибо почти одновременно с ним такие же результаты получили Декарт, Ферма, Роберваль.

Отметим еще несколько достижений Торричелли, связанных с понятием интеграла. Он разработал кинематический способ построения касательных к кривым (его, опять же независимо от Торричелли, открыл Роберваль); для случая ускоренного движения доказал, что ордината графика скорости движения тела пропорциональна тангенсу угла, образованного касательной к графику пройденного пути, с осью абсцисс. Это означает, что в частном случае ускоренного движения

установлена взаимная обратность операций дифференцирования и интегрирования: $v = kds'/dt, s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$.

При исследовании вопроса о центрах тяжести Торричелли доказал теорему, которая в современных терминах интерпретируется как известная формула для нахождения координаты центра тяжести плоской фигуры в виде отношения интегралов.

В трактовке неделимых Торричелли не придерживался воззрений Кавальери: он считал, что неделимые имеют ту же размерность, что и геометрический объект. Этим он сделал значительный шаг вперед к интегральным суммам.

Кроме занятий математикой, Торричелли успешно работал в других областях развивающейся науки — физике, оптике, механике, баллистике, метеорологии. Всем известны эпохальные опыты Торричелли, разрушившие тезис Аристотеля о том, что «природа не терпит пустоты».

Произошло это так. Во время строительства фонтанов при дворце флорентийского герцога Козимо II Медичи заметили, что вода по трубам поднимается не выше 34 футов (10,4 м), а должна была подниматься «хоть до облаков». За разъяснением обратились к придворному математику Галилею, который поручил провести опыты Торричелли и Вивiani. Торричелли выдвинул гипотезу о том, что вода в трубе уравновешивается давлением атмосферного воздуха, и предложил заменить воду более тяжелой ртутью, которая должна подняться на высоту в 13,6 меньше, чем вода. Опыты подтвердили гипотезу Торричелли. О них известно из двух писем Торричелли к М. Риччи. Торричелли писал, что опыт с ртутью он ставил не для того только, чтобы получить вакуум, но и для обоснования устройства прибора, регистрирующего давление воздуха (такой прибор был изобретен Торричелли, Э. Мариотт назвал его барометром). Здесь же Торричелли высказал соображение о том, что давление воздуха на разных высотах должно быть различным (это затем проверил Б. Паскаль).

Великий герцог Тосканский изъявил желание увидеть опыт в исполнении самого Торричелли, который провел эксперимент и успешно отбил атаки сторонников воззрений Аристотеля.

Торричелли прославился также шлифованием оптических стекол. После сделанных Галилеем астрономических открытий мода на изготовление телескопов и шлифование линз распространилась во многих странах. В XVII в. этим занимались Галилей, Кеплер, Кавальери, Торричелли, Декарт, Спиноза, Гюйгенс, Ньютон и другие выдающиеся ученые. Торричелли владел способом изготовления линз, позволяющим ему утверждать, что никто не может сделать их лучше, чем он. И это не было похвалой. Торричелли поставил в известность о своем способе великого герцога, который наградил его золотой цепью и медалью за доблесть, а открытие предписал держать в строгой тайне. Описание открытия хранилось в специальной шкатулке, которая затем исчезла. Исследователь творчества Торричелли В. Ронки (р. 1897) предположил, что для проверки качества линз Торричелли пользовался интерференционным способом, нашедшим применение лишь в XX в.

Одновременно со службой у великого герцога Торричелли был профессором математики Флорентийского университета. Биографы пишут, что он отличался высокой образованностью, благожелательностью, но в вопросах науки на компромиссы с идейными противниками не шел. Когда Кавальери послал ему книгу Гульдина с критикой способа неделимых, Торричелли в ответ написал: «В общем я Вам объявляю, что отец Гульдин, насколько можно судить по этой книге, просто болван»⁹.

Торричелли нашел формулу для определения скорости вытекающей из отверстия в сосуде жидкости, развил некоторые положения динамики Галилея, дал правильное объяснение возникновению ветра и циркуляции воздуха, установил ряд положений баллистики.

Сочинения Торричелли в четырех томах изданы в 1919 и 1949 гг.

6

Развитие науки в XVI и XVII вв. вылилось в научную революцию. Она характеризуется созданием основы современного научного естествознания и совершенствованием математики как его рабочего аппарата.

В этом процессе действительно проявлялись новые тенденции: наука все более чутко откликалась на за-

просы практики, обслуживала ее; она развивалась в борьбе с догматизмом; наука базировалась на результатах эксперимента, ее основу составляли механика и математика; новые условия формировали новый тип ученого и диктовали необходимость объединения усилий ученых, что привело к возникновению научных кружков, а впоследствии — академий; наконец, наука испытывала на себе влияние передовых идей века.

Производство ставило перед наукой сложные задачи. «Такие задачи появлялись в промышленной, строительной, транспортной технике, в быстро прогрессирувавшем артиллерийском деле, в навигации, в связи с изобретением и совершенствованием различных приборов и инструментов и т. д. Назовем несколько таких вопросов, правильная постановка и решение которых требовали математического исследования, завершающегося числовым расчетом. Это цикл проблем гидротехники (давление воды на плотины и плузы, работа насосов, движение воды в капалах), затем кораблестроения и навигации (устойчивость плавающих тел, движение твердого тела в жидкости, черчение географических карт, определение долготы корабля в открытом море), артиллерии (прежде всего движение бронешного тела в пустоте и в сопротивляющейся среде), оптики (свойства линз и их систем), точного приборостроения (часы и колебания маятника)» [13, с. 10].

Однако ошибочно было бы думать, что состояние науки целиком определялось практикой, ее пуждами. В каждой науке есть свои внутренние стимулы, обуславливающие прогресс. «Конечно, было бы бесплодным упрощенчеством истолковывать научные исследования той эпохи как выполнение определенного и осознанного социального заказа: преломление общественных процессов в индивидуальном творчестве происходит, как правило, весьма сложным образом. К тому же наука развивается по законам наследственного процесса: ее дальнейший ход определяется не только ее состоянием и общественными условиями в данный момент, но и предшествующей историей» [15, с. 83]. Необходимо учитывать также и наличие обратной связи: развивающаяся наука ставила перед практикой, в свою очередь, новые задачи.

Начало научно обоснованного выступления против средневековых догм связано с выходом в свет основного труда Коперника (1473—1543). После Коперника

это движение возглавили Дж. Бруно (1548—1600) и Галилей. Борьба с догмами пронизывает творчество Декарта. На одной из гравюр он изображен попирающим ногой сочинения Аристотеля.

В Новое время резко изменилось отношение к эксперименту. Декарт осуждает философов, «которые, пренебрегая опытом, думают, что истина выйдет из головы, как Минерва из головы Юпитера». Паскаль заявляет более категорично: «Эксперимент — это тот учитель, за которым надо следовать в физике». Декарт и Паскаль имеют в виду опыты, явившиеся поворотными пунктами в развитии науки, такие, как опыты Галилея, изучавшего падение тел и колебания маятника, или опыты Торричелли и Паскаля, измерявших атмосферное давление.

В XVII в. сложилось механическое толкование системы мира: мир рассматривался как механизм, действующий в соответствии с неизменными законами механики. В связи с таким взглядом ведущее положение приобрела механика, а вместе с ней — математика.

Еще Леонардо да Винчи (1452—1519) называл механику «раем математических наук». Галилей говорил: «Философия написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами (я разумею Вселенную), но ее нельзя понять, не научившись сначала понимать ее язык и не изучив буквы, которыми она написана. А написана она на математическом языке, и ее буквы — это треугольники, дуги и другие геометрические фигуры, без каковых невозможно понять почеловечески ее слова: без них — тщетное кружение в темном лабиринте» [49, р. 232].

В условиях Нового времени формировался новый тип ученого: ученые в большинстве своем были механиками, физиками, математиками, астрономами, инженерами и часто философами. Многие крупные ученые занимались инженерной практикой. Галилей, Гюйгенс, Ньютон строили зрительные трубы; Гюйгенс (1629—1695), кроме того, прослыл выдающимся часовым мастером; Паскаль и Лейбниц конструировали вычислительные машины; Симон Стевин (1548—1620) занимался гидротехникой, Декарт — фортификацией; многие выдающиеся исследователи занимались шлифованием линз.

В связи с резким ростом исследований возникла настоятельная необходимость в общении ученых. Это

привело к большой научной переписке, появлению своего рода центров научной информации, научных кружков, впоследствии — академий. Во Франции вся переписка шла через М. Мерсенна (1588—1648), в Англии — Г. Ольденбурга (1615—1677) и Д. Коллинса (1625—1683), в Италии — М. Риччи, в Германии — К. Шотта.

Организованные ранее в большинстве стран Европы университеты не стали научными центрами. Это связано с преобладанием в них схоластики. Парижский университет, например, с начала XVI в. был оплотом схоластики и вел непрестанную борьбу против гуманизма. Новые идеи в университетскую и школьную науку не проникали. Да и распространялись они крайне медленно. Говорят, что «Начала» Ньютона в первые годы после издания прочитали всего четыре человека. Об отношении к преподаванию математики можно судить по тому, что во многих школах на преподавателей математики смотрели свысока, они не входили в коллегию преподавателей, возникла даже пословица: *mathematicus non est collega* (математик — не коллега).

Иное дело — академии, соответствующие духу новых исследований. Они типичны «для этого времени, опьяненного обилием новых знаний, занятого искоренением изживших себя суеверий, порывающего с традициями прошлого, лелеющего неумеренные надежды на будущее. Тогда отдельный ученый научился быть довольным тем, что он добавил бесконечно малую частицу к общей сумме знаний: короче говоря, тогда возник современный ученый»¹⁰.

Первые научные академии появились в Италии по опыту академий литературы. В 1560 г. в Неаполе организована *Accademia secretorum naturae* (Академия тайн природы), просуществовавшая недолго. В 1603 г. основана *Accademia dei Lincei* (Академия «рысьеглазых», т. е. видящих очень хорошо), предназначенная для изучения природы и распространения знаний в области физики. Членом этой академии был Галилей, она способствовала распространению его учения.

В 1654 г. в Англии начало функционировать Оксфордское научное общество (Невидимая коллегия). Девиз общества «*Nullius in verba*» («Ничего из слов») направлен против схоластики. Общество официально было признано королем и в 1662 г. преобразовано в *Royal Society for the Advancement of learning* (Королевское общество для развития знания). С марта

1665 г. стал издаваться научный журнал *Philosophical Transactions* (Философские труды).

Во Франции на базе научного кружка Марсенна мистром Людовика XIV Кольбером в 1666 г. организована *Académie des Sciences* (Академия наук). Первым президентом ее был Гюйгенс. *Journal des Savants* (Журнал ученых) издается с 1665 г. Лейпцигский журнал *Acta Eruditorum* (Труды ученых) издавался на латинском языке с 1682 г.

Наука XVII в. формировалась под влиянием философских идей Ф. Бэкона (1561—1626) и Р. Декарта. Рационализм Декарта вооружал науку уверенностью в торжество разума, он стал идеологией буржуазии, перестраивающей производство.

7

Математика XVII в. резко отличается от предшествующей. К XVII в. она включала в себя арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию и занималась преимущественно постоянными величинами. В XVII в. возникли качественно новые разделы математики: аналитическая геометрия, проективная геометрия, теория вероятностей, исчисление бесконечно малых, содержащее в себе начала важнейших новых дисциплин — теории дифференциальных уравнений, теории рядов, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии.

Бурное развитие математики в XVII в., революционный скачок, завершившийся построением дифференциального и интегрального исчисления, закономерны. Об этом писал Луи де Бройль: «...по мере того как ученые XVII века, непрерывно и сознательно применяя наблюдение и экспериментальный метод, начали постигать основные законы механики, астрономии и некоторых частей физики, они почти неизбежно были вынуждены развивать методы рассуждения и расчета, которые подводили их к анализу бесконечно малых» [5, с. 167].

8

9 февраля 1665 г. в «Журнале ученых» был помещен некролог П. Ферма, в котором говорилось: «Это был один из наиболее замечательных умов нашего века, такой универсальный гений и такой разносторонний,

что если бы все ученые не воздали должное его необыкновенным заслугам, то трудно было бы поверить всем вещам, которые нужно о нем сказать, чтобы ничего не упустить в нашем похвальном слове» [3, с. 37].

Несмотря на широкое признание Ферма при жизни и в последующие годы, о нем известно мало. Считалось, что родился он, жил и умер в Тулузе. Однако в 40-х годах XIX в. адвокат Топиак в архивах городка Бомон-де-Ломань, на юге Франции, обнаружил запись о крещении его: «Пьер, сын Доминика Ферма, буржуа и второго консула города Бомона, крещен 20 августа 1601 г. Крестный отец — Пьер Ферма, купец и брат названного Доминика, крестная мать — Жеанна Кознюв, и я». Подписи нет, но предыдущая запись подписана: «Дюма, викарий». Отец Ферма пользовался в Бомоне уважением; его мать Клер-де-Лонг происходила из семьи юристов.

Начальное образование Ферма получил у францисканцев. В колледже он хорошо изучил языки — греческий, латинский, испанский, итальянский и впоследствии писал стихи на латинском, французском и испанском «с таким изяществом, как если бы он жил во времена Августа и провел большую часть своей жизни при дворе Франции или Мадрида».

Предполагается, что Ферма получил юридическое университетское образование в Тулузе. После окончания университета он стал заниматься адвокатурой, а все свободное время отдавал изучению трудов древних авторов и математике. Он слыл знатоком античности; современников поражали его знания языков, латинской и греческой филологии.

Хотя адвокатская практика Ферма проходила успешно, он решил перейти на государственную службу и 14 мая 1631 г. стал чиновником кассационной палаты Тулузского парламента. (Парламентами во Франции назывались окружные суды, учрежденные Филиппом Красивым в XIV в.)

Тот же 1631 г. ознаменовался еще одним важным событием — Ферма женился на родственнице с материнской стороны Луизе-де-Лонг, дочери советника того же парламента. В семье Ферма было пятеро детей. Старший сын Сэмюэль-Клемент в 1679 г. издал первое собрание сочинений отца.

По службе за 34 года Ферма поднялся до звания советника следственной палаты; он был известен как

глубокий знаток права и честный юрист. Ферма вел довольно уединенную жизнь, тратя свое время на службу и занятия наукой. Выезжал из Тулузы он только по служебным делам. В одну из таких поездок 12 января 1665 г. Пьер Ферма скончался.

При жизни Ферма издано всего одно сочинение — «О сравнении кривых линий с прямыми» (Тулуза, 1660). Однако его достижения были известны из обширной переписки. Среди его корреспондентов были Мерсенн, Роберваль, Этьен и Блез Паскали, Декарт, Кавальери, Торричелли, Гюйгенс, Валлис, Каркави (1603—1684), де-Бесси (1600—1675), Лалубер (1600—1664), Гассенди (1592—1655) и другие. В августе 1654 г. Ферма обратился к Каркави, жившему тогда в Париже, и Паскалю с просьбой издать его сочинения. Его желание осталось невыполненным: Паскаль умер раньше Ферма, Каркави издать сочинения не сумел.

Некоторые результаты Ферма помещали в свои книги его друзья. Так, способ отыскания экстремумов изложил Эригон в «Курсе математики» (1642). Письма Ферма корреспондентам публиковались ими еще при жизни Ферма (Валлис, Гассенди).

Иногда Ферма упрекали в хвастовстве. (Декарт однажды сказал: «Г-н Ферма — гасконец, я — нет». Однако негасконское происхождение Декарта не мешало ему высказывать свое превосходство по отношению к другим.) Возможно, такое мнение возникало из-за того, что Ферма отправлял другим математикам «вызовы», предлагая решить те или иные задачи. Так, в феврале 1657 г. он в письме к английским математикам предложил доказать, что уравнение Пелля $ax^2 + 1 = y^2$ имеет бесчисленное множество решений, и найти их при $a = 109, 149$ и 433 . Эти значения выбраны из соображений, что наименьшие решения для них получаются очень большими и их невозможно найти подбором.

Чтобы у читателя создалось представление о трудности предлагаемых Ферма своим корреспондентам задач, приведем одну: найти прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза и сумма катетов — точные квадраты в целых числах. Ферма указал решение: $a = 4\ 687\ 298\ 610\ 289$, $b = 4\ 565\ 486\ 027\ 761$, $c = 1\ 061\ 652\ 293\ 520$.

Этот треугольник прямоугольный и удовлетворяет условиям задачи. Гипотенуза — полный квадрат: $a = 4\ 687\ 298\ 610\ 289 = 2\ 165\ 017^2$ и сумма катетов —

полный квадрат: $b + c = 5\,627\,138\,321\,281 = 2\,372\,159^2$. Стоит заметить, что в руках Ферма не было даже механического арифмометра.

Достижения Ферма в математике значительны. Об интегрировании речь пойдет дальше. Вместе с Декартом Ферма заложили основы аналитической геометрии, вместе с Паскалем — теории вероятностей. Открытия Ферма способов проведения касательных и отыскания экстремумов таковы, что Д'Аламбер в «Энциклопедии» указывал, что у Ферма впервые встречаются приложения дифференциалов к нахождению касательных, а Лагранж в «Лекциях по исчислению функций» назвал Ферма «первым изобретателем новых исчислений». Так же отзывался о достижениях Ферма Лаплас (1749—1827) в «Аналитической теории вероятностей». В 1934 г. было опубликовано письмо Ньютона, из которого видно, что мысли о дифференциальном исчислении у него возникли при рассмотрении способа проведения касательных Ферма.

Каждый школьник знает теорему Ферма — необходимый признак экстремума функции: если функция имеет в некоторой точке экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю.

Значителен его вклад в теорию чисел. Ферма из многих ее вопросов, занимавших предшественников, выделил те, которые стали основными в исследованиях математиков XVIII и XIX вв. Даже нематематики знают о не доказанной до сих пор в общем виде великой теореме Ферма, давшей значительный импульс многим тонким исследованиям.

Ферма успешно занимался оптикой. Он высказал принцип, носящий его имя. Его суть состоит в том, что свет между двумя точками распространяется по пути, для прохождения которого требуется наименьшее время. Он сыграл важную роль в развитии вариационных методов в механике и физике и послужил руководством для Луи де Бройля (р. 1892) и Шредингера (1887—1961) в работах по волновым свойствам материи.

Завершим краткий обзор достижений Ферма его словами в письме к Карнави (1659 г.): «Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние не все впади, и это может проникнуть в сознание тех, которые придут после меня для передачи факела сыновьям... Я добавляю: многие будут приходить и уходить, а наука обогащается»¹¹.

Приступим теперь к рассмотрению достижений Ферма в интегрировании. Но прежде необходимо пояснение терминологии. Довольно редко в наше время математики употребляют слово «квадратура». Ферма

под квадратурой понимал $\int_a^b f(x) dx$, т. е. площадь, ограниченную осью Ox , графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (такую фигуру при изучении определенных интегралов сейчас называют криволинейной трапецией). Квадратуры парабол $y = x^n$ по Ферма соответствуют вычислению интегралов $\int_0^a x^n dx$. Ферма рассматривал и дробные показатели, т. е. по сути вычислял интегралы $\int_0^a x^{p/q} dx$. Затем он ввел в рассуждения «гиперболы высших порядков», задаваемые уравнениями $x^p y^q = \text{const}$, и находил соответствующие квадратуры.

Интегрирования Ферма и Роберваль осуществляли путями, отличными от тех, которыми шли Кавальери и Торричелли.

Из письма Ферма Робервалю 22 сентября 1636 г. видно, что он при нахождении интеграла $\int_0^a x^n dx$

пользовался методом, примененным Архимедом для значений $n = 1 : 2$. Он сообщал, что обладает общим методом, и привел результат для $n = 3$. Роберваль ответил, что и он находил такие квадратуры и пользовался

неравенствами $\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$. Роберваль

высказал предположение, что и Ферма применял их (в письме 4 ноября Ферма это подтвердил). Однако этот метод требовал громоздких вычислений, связанных с нахождением сумм $\sum_{k=1}^m k^n$, и оказался непри-

годным в случаях с дробными и отрицательными показателями степеней. Ферма стал искать другой прием и около 1642 г. нашел его. Он оказался эффективным при любых показателях степеней, кроме $n = -1$.

В письме к Кавальери, посланном через Мерсенна в 1644 г. в ответ на запрос Кавальери, Ферма сообщил

о найденных результатах для $n > 0$, а также о кубатурах и определении центров тяжести фигур и соответствующих тел вращения. Вот выдержка из письма: «Уже давно, следуя примеру Архимеда касательно параболы, мы нашли квадратуру всех тех бесконечных (по числу) парабол, в которых абсциссы на диаметре пропорциональны ординатам, возведенным в какую угодно степень. Эту истину, открытую нами впервые и уже давно тому назад, мы сообщили г. Бограну и другим; однако необходимо признать, что г. Роберваль, приступивший к изучению таких проблем по нашим указаниям, нашел их решение своим собственным умом благодаря своей проницательности и одаренности в таких науках.

Равным образом мы нашли и центры тяжести этих фигур, равно как и произведенных ими тел, притом особым, открытым нами способом...» [16, с. 396].

Представление о методе Ферма получим, если обратимся к квадратуре параболы $x^p = y^q$ ($p > 0$, $q > 0$),

что соответствует вычислению интеграла $\int_0^x x^{p/q} dx =$

$$= \frac{(p+q)}{qx^q} \cdot \text{Разделим промежуток } (0, x) \text{ точками с абс-}$$

циссами $x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots$, где $\alpha < 1$, и проведем через них прямые, перпендикулярные оси Ox . Криволинейная трапеция разобьется на полоски, у которых ширина стремится к 0. Основаниями полосок будут разности (Δx_i) абсцисс $(1 - \alpha)x, \alpha(1 - \alpha)x, \alpha^2(1 - \alpha)x, \dots$, а значениями функции $y = x^{p/q}$ в точках деления величины $x^{p/q}, \alpha^{p/q}x^{p/q}, \alpha^{2p/q}x^{p/q}, \alpha^{3p/q}x^{p/q}, \dots$. Заменяем полоски прямоугольниками с основаниями Δx_i и высотами — указанными значениями функции $y = x^{p/q}$. Криволинейная трапеция заменится при этом ступенчатой фигурой, состоящей из элементарных прямоугольников, и вычисление площади ее сведется к суммированию бесконечной геометрической прогрессии $(1 - \alpha)x^{(p+q)/q}, (1 - \alpha)\alpha^{(p+q)/q}x^{(p+q)/q}, (1 - \alpha)\alpha^{2(p+q)/q}x^{(p+q)/q}$. Сумма ее будет $\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^{\frac{p+q}{q}}} x^{\frac{p+q}{q}}$.

Для нахождения площади криволинейной трапеции, а значит и интеграла, нужно вычислить предел

этой суммы при $\Delta x_i \rightarrow 0$ т. е. при $\alpha \rightarrow 1$. Извлечение корня $\sqrt[q]{\alpha}$ Ферма заменил определением $q-1$ средних пропорциональных. Если β — первая такая средняя пропорциональная между 1 и α , то $\alpha = \beta^q$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} &= \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \\ &= \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{p+q-1})}. \end{aligned}$$

Отсюда при $\beta \rightarrow 1$ предельное значение будет $q/(p+q)$.

Таким образом,
$$\int_0^x x^{p/q} dx = \frac{qx^{\frac{p+q}{q}}}{p+q}.$$

Ферма нашел квадратуры парабол $y^2 = ax$, $x^4 = ay^3$, но его рассуждения применимы и в общем случае. Все это показывает, что Ферма возродил метод интегральных сумм и, так же как Сабит ибн Корра, делил промежуток интегрирования на неравные части, чем внес в метод существенное усовершенствование.

Для получения квадратур гипербол, т. е. вычисления интеграла вида $\int_x^\infty \frac{dx}{x^m}$, $m = p/q$, $p > q$, Ферма

делил криволинейную трапецию на полосы ординатами, проведенными через точки x ; αx ; $\alpha^2 x$, ..., где $\alpha > 1$. Площади полученных затем прямоугольников составят геометрическую прогрессию с первым членом $(\alpha-1)/x^{m-1}$ и знаменателем $1/\alpha^{m-1}$. Сумма прогрессии будет α^{m-1}/x^{m-1} , $(\alpha-1)/(\alpha^{m-1}-1)$. Ее предел при $\alpha \rightarrow 1$ равен $1/(m-1) x^{m-1}$, что при $m = p/q$,

$p > q$ дает
$$\int_x^\infty x^{-\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p-q} x^{\frac{q-p}{q}}.$$

И для гипербол Ферма привел только случай $y = a^3 x^{-2}$. Но и здесь, как при квадратуре парабол $y^2 = ax$ и $y^3 = ax^2$, он указал, что все это примеры, доказывающие правильность общего приема. Значит, в итоге Ферма вычислил несобственный интеграл

$$\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_0}.$$

Метод Ферма для нахождения квадратур гипербол $y = a/x^m$ применим, когда $m > 1$, так как при $m < 1$ площадь, заключенная между гиперболой, некоторой ее ординатой и осью Ox , становится бесконечной. Но конечна площадь, «прилегающая» к оси Oy — другой асимптоте гиперболы. Тогда вопрос о квадратуре решается заменой роли осей. Квадратуру гиперболы $y = 1/x$ Ферма не нашел; он заметил, что при употребляемом им делении интервала все полоски становятся равновеликими; этот факт установил раньше его Григорий Сен Вепсан (1584—1667).

Ферма применял и другие приемы интегрирования: замену переменных и аналог интегрирования по частям, что позволяло ему сводить новые квадратуры к известным. Он выполнил, например, квадратуру кривой $y = a^3/(x^2 + a^2)$, называемой локоном Аньези.

С помощью подстановки $z^2 = ay$ он интеграл $\int_0^{\infty} \frac{a^3 dx}{x^2 + a^2}$

свел к интегралу $\frac{1}{a} \int_0^{\infty} z^2 dx$, который привел

к $\frac{2}{a} \int_0^a xz dz$, а затем с помощью замены $xz = t$ —

к $2 \int_0^a t dz$. Исключая из данного уравнения и уравнений

подстановок x и y , Ферма получил уравнение окружности $t^2 = a^2 - z^2$, поэтому интеграл $2 \int_0^a t dz$ дает

площадь полукруга радиуса a . Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{a^3 dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} z^2 dx = \frac{2}{a} \int_0^a xz dz = 2 \int_0^a t dz = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Ферма исследовал интегралы вида $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx$ при нечетных n и показал, как сводятся они к квадратуре круга. Он выполнил квадратуру кривой $x^3 + y^3 = axy$, получившей название декартова листа.

Изложение своего метода и его применений Ферма дал в сочинении, оформленном после 1657 г. и изданном в 1679 г. под названием: «О преобразовании урав-

нений мест... с приложением способа употребления геометрической пропорции к квадрированию бесчисленных парабол и гипербол».

Текст сочинения занимал около 20 печатных страниц, что в сравнении с большим томом «Геометрии неделимых» Кавальери выглядело совсем невнушительно. Но Ферма на малом объеме сумел изложить более общий метод, позволяющий прилагать его не только к квадратурам и кубатурам, но и к спрямлению кривых. Его метод отличался от методов Кеплера и Кавальери тем, что Ферма составлял интегральные суммы, чего у Кеплера и Кавальери не было. Кроме того, в отличие от неделимых Кавальери полоски, на которые разбивал фигуры Ферма, имели ширину. Ферма пользовался системой координат, которую он ввел вместе с Декартом в практику математиков, и в отличие от Кеплера, пользовавшегося бесконечно малыми и решающего геометрическую задачу геометрически, сводил ее к алгебраической, к сумме геометрической прогрессии.

9

Если о жизни Ферма сведений сохранилось мало, то о Робервале и того меньше. Нет даже портрета ученого. Все известное о нем — в письмах, работах.

Настоящее имя его — Жиль Персонье; Робервалем он назвался сам, по имени местечка, откуда происходил, и присоединил к фамилии частицу де, что, впрочем, могло означать и не обязательно знатность рода, а то, что он именно оттуда, из того местечка.

Жиль Персонье родился 8 августа 1602 г. в окрестностях г. Бове, расположенного в 70 км на север от Парижа. Родители его, крестьяне, сумели дать сыну значительное образование. После завершения его юноша отправился путешествовать по Франции, самостоятельно совершенствовал полученные знания и зарабатывал на пропитание, устраиваясь домашним учителем, уча и учась, как говорил он сам. Какие-то пути привели Персонье в 1627 г. к крепости гугенотов Ла-Рошели во время осады ее войсками Ришелье. Он участвовал в осаде крепости; летом 1628 г. молодой ученый появился в Париже.

Здесь Роберваль завязал знакомство с Мерсенном и активно включился в разработку насущных проблем

математики, физики, астрономии. Он занял место профессора философии в старинном коллеже Мэтр Жерве Кретьен, которое сохранил за собой до самой смерти 25 сентября 1675 г. Выдающиеся способности Роберваля позволили ему также занять в 1634 г. кафедру П. Рамуса в Коллеж де Франс — лучшем коллеже Франции.

Роберваль непременно участвовал в ассамблеях кружка Мерсенна, вел переписку со многими знаменитыми учеными. Он обладал тяжелым характером, был нелюдим, завистлив, мнителен, тщеславен. Письма некоторых современников содержат описание грубостей Роберваля, резкостей, неблагоприятных поступков. Однако положительный научный потенциал вынуждал современников считаться с Робервалем. Роберваль оставил значительный след в науке.

Основное содержание исследований Роберваля составляли работы, связанные с развивающимися инфинитезимальными методами. Он открыл кинематический способ построения касательных к кривым. Этот способ основывался на том, что скорость движения направлена по касательной к траектории.

В словах Роберваля правило для построения касательной выглядело так: «По специфическим свойствам кривой, которые вам даются, исследуйте различные движения точки, описывающей эту кривую, в том ее положении, где вы хотите провести касательную; все эти движения сложите в одно движение, проведите линию направления этого движения и получите касательную к кривой» [50, с. 22].

Роберваль построил касательные к многим кривым, но его метод не обладал общностью и иногда приводил к ошибкам, что обнаружил французский математик Дюамель лишь в XIX в.

Роберваль переоткрыл метод неделимых. Некоторые исследователи истории математики считают, что он знал о методе неделимых Кавальери до опубликования его самим Кавальери в 1635 г. В общих чертах метод неделимых у Кавальери сложился к 1629 г., и Кавальери сообщал о нем в письмах. Роберваль датировал открытие им метода неделимых 1630 годом. Существенное отличие метода Роберваля от метода Кавальери состояло в том, что неделимые у Роберваля обладали размерностью геометрических объектов. Вилейтнер в «Истории математики от Декарта до середины XIX сто-

летия» высказал предположение, что Роберваль «поступал так, чтобы замаскировать свою зависимость от Кавальери».

Еще в 1628 г. Мерсепп ознакомил Роберваля с задачей, носящей название парадокса Аристотеля. Суть ее в следующем. Предположим, что окружность катится без скольжения по прямой. В произвольный момент она касается прямой точкой A . Выберем на радиусе OA точку B ближе к центру окружности, чем точка A . Когда окружность совершит один оборот, она будет касаться прямой той же точкой A , а точка B будет опять находиться на вертикали OA . Необходимо это объяснить, имея в виду, что путь, пройденный точкой A , больше пути, пройденного точкой B : $2\pi \cdot OB$.

Эта задача привлекла внимание Роберваля к «модной» в то время среди математиков кривой — циклоиде. Она сыграла исключительную роль в развитии математики на заре становления анализа бесконечно малых. На циклоиде в числе других кривых испытывалась мощь аппарата нового исчисления. Эта кривая описывается любой фиксированной точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой. Можно сразу же сказать, что таких кривых мы в жизни наблюдаем бесчисленное множество: где есть катящееся колесо (а оно есть сейчас почти всюду), там и циклоиды. Удивляться приходится, почему весьма наблюдательные и пытливые древние математики не открыли циклоиду.

Ее открыл, дал название и начал изучать Галилей — он пытался определить взвешиванием площадь между аркой циклоиды и прямой, по которой катится образующая ее окружность. Эту площадь впервые вычислил Роберваль, затем — Декарт, Ферма, Торричелли. Изучением эпи- и гипоциклоид (кривых, описываемых фиксированной точкой окружности, катящейся по наружной или внутренней части другой окружности) занимались Роберваль и Торричелли. Ученик Галилея В. Вивiani первый нашел метод построения касательной к циклоиде. Эту же задачу решили Роберваль, Декарт, Ферма. Объемы тел, образуемых при вращении циклоиды вокруг различных прямых, находили Роберваль, Паскаль, Торричелли, Гюйгенс. Циклоиде посвятил Б. Паскаль свой знаменитый «Трактат о рулетте» (рулетта — французское название циклоиды). Трактат Паскаля Д'Аламбер назвал «чудом проницательности и проникновения». Английский математик

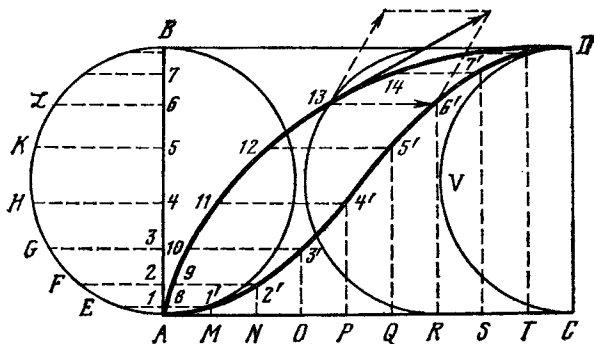


Рис. 13

К. Рен выполнил спрямление циклоиды (определил ее длину). Х. Гюйгенс изобрел циклоидальный маятник и применил его в часах. Идею использования маятника для регулирования хода часов выдвинул в 1641 г. Галилей, но реализовать ее не смог ввиду наступившей потери зрения. Гюйгенсу удалось доказать, что период колебаний маятника не зависит от амплитуды (такой маятник называется изохронным), когда маятник будет описывать циклоиду. Для этого требуется, чтобы регулирующие пластинки были также циклоидальной формы. В связи с решением подобных практических задач в математике возник раздел об эволютах и эвольвентах.

Квадратуру циклоиды Роберваль произвел так. Рисунок 13 взят из работы Роберваля. На нем AGB — половина производящего циклоиду круга, длина отрезка AC равна πr , т. е. половине длины окружности производящего круга ($r = AB/2$). Разделим полуокружность AGB на равные дуги $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FG} = \dots$ и отрезок AC на равные части $AM = MN = NO = \dots$; получается, что дуги окружности равны отрезкам прямой, т. е. $\overset{\frown}{AE} = AM$, $\overset{\frown}{EF} = MN$ и т. д. Из точек деления окружности E, F, G, \dots опустим перпендикуляры на диаметр AB : $E1, F2, G3$ и т. д. Они, по старинной терминологии, представляют собой синусы соответствующих углов. Из точек M, N, O, \dots деления отрезка AC восстановим перпендикуляры $M1', N2', O3'$ и т. д. до пересечения с продолжениями отрезков $E1, F2, G3$ и т. д. Тогда будет $M1' = A1$, $N2' = A2$, $O3' = A3$ и т. д. Линия, проведенная через найденные точки $1', 2', 3', \dots$, представляет собой си-

нусоиду с осью, проходящей через центр круга параллельно AC . Дуга $A - 3' - D$ — половина синусоиды. Роберваль, таким образом, впервые построил график тригонометрической функции (эту кривую он называл «спутницей»); синусоидой ее впервые наименовал французский математик О. Фабри в 1659 г.).

Построим теперь циклоиду, т. е. траекторию точки A . Когда круг пройдет расстояние AM , точка A займет положение точки E на окружности, вертикальный диаметр будет опираться на точку M ; расстояние точки A от него будет таким же, как расстояние точки E от AB . Отложим теперь от точки I' влево отрезок $I' - 8$, равный отрезку EI , тогда получим точку 8, принадлежащую циклоиде. Она определяет положение точки A , когда круг касается AC в точке M . Через определенное время точкой касания будет точка N ; поскольку $AN = AF$, точка A переместится в положение точки F на окружности. Отложим от точки $2'$ влево отрезок $2' - 9$, равный отрезку $F2$, получим точку 9, принадлежащую циклоиде и определяющую положение точки A в тот момент, когда окружность будет касаться AC в точке N . Таким последовательным построением получим точки 10, 11 и т. д., т. е. точки, принадлежащие циклоиде. (Роберваль называл ее «трохоида», что по-гречески означает «колесная»).

Обратимся к квадратуре циклоиды. Получены две кривые: синусоида и трохоида, причем трохоида построена с помощью синусоиды, которая поэтому и называется спутницей трохоиды. Изобразим также полукруг CVD . Прямоугольник $ABDC$ состоит из четырех частей: клина $A - B - D - 10 - A$, петли $A - 10 - D - 3' - A$, клина $A - 3' - D - V - C - A$ и полукруга DVC . Синусоида делит прямоугольник на две равновеликие части. Квадрирование циклоиды состоит в нахождении площади фигуры $A - 10 - D - C - A$, которая состоит из трех последних фигур. Площадь прямоугольника $ABCD$ будет $AB \cdot AC = 2r \cdot \pi r = 2\pi r^2$, т. е. равна двум площадям производящего круга. Значит, площадь криволинейной трапеции $A - 3' - D - C - A$ равна πr^2 . Остается вычислить площадь петли $A - 10 - D - 3' - A$ и прибавить ее к πr^2 , тогда найдем площадь фигуры $A - 10 - D - C - A$.

На этом этапе Роберваль и применяет метод неделимых. В качестве регулы, т. е. направляющей прямой, он берет прямую, перпендикулярную AB , и про-

водит неделимые в полукруге AGB и петле. На рис. 13 показаны неделимые $E1$ и $8-1'$, $F2$ и $9-2'$ и т. д. Каждое неделимое полукруга соответственно равно каждому неделимому петли, поэтому и площадь полукруга равна площади петли. Прибавим ее к πr^2 и получим $3\pi r^2/2$. Следовательно, площадь, ограниченная одной аркой циклоиды и прямой, по которой катится окружность, равна утроенной площади производящего круга.

Здесь же, на рис. 13, показано построение касательной к циклоиде. Роберваль разлагал движение по циклоиде на два составляющих: переносное вместе с центром окружности (этот вектор параллелен AC) и относительное вращение вокруг центра окружности (вектор, касающийся окружности). Касательная к циклоиде направлена по диагонали ромба ¹².

В письме 28 апреля 1638 г. Мерсенн известил Декарта о результатах Роберваля: «Что касается съёра Роберваля, он нашел множество новых результатов, как геометрических, так и механических... Он нашел, что площадь рулетты равна трем площадям ее производящей окружности». Декарт в письме Мерсенну 27 мая 1638 г. отозвался с похвалой о решении Роберваля, но заметил в своей обычной манере: «Признаюсь, что до сих пор я о ней никогда не думал и что его замечание довольно красиво; но я не вижу, как можно поднимать такой шум по поводу открытия вещи настолько простой, что всякий, хоть немного знакомый с геометрией, не может не открыть ее, если только станет ее искать» [10, с. 183].

В письме 1 июня 1638 г. Роберваль познакомил со своим решением Ферма, который уже знал о нем из письма Мерсенна и успел высказать Мерсенну некоторые замечания. Письмо Мерсенну от 27 июля 1638 г. Ферма начал словами: «Я берусь за перо, чтобы оправдать г. Роберваля, не дожидаясь, пока моя предвзятая критика дойдет до него».

Мнительного Роберваля беспокоила популярность циклоиды и большое число работ, посвященных ее квадратурам, кубатурам тел вращения. Он жаловался на то, что некоторые иностранцы набрасываются на его открытия, «как трутни на мед», и похищают его результаты. Возможно, здесь содержался совершенно несправедливый намек Роберваля на Торричелли. Когда Роберваль обвинил Торричелли в том, что Торри-

челли заимствовал у него способ построения касательных к кривым, Торричелли отвечал с достоинством и по существу: независимо от того, что опубликовано во французских работах, публикации Торричелли содержат его самостоятельные открытия.

Уступив приоритет Торричелли, Роберваль выполнил спрямление дуги спирали Архимеда и определил площадь фигуры, что в современных терминах соответствует вычислению несобственного интеграла от функции, обращающейся в бесконечность на одном из концов промежутка интегрирования. При вычислении длины дуги спирали Роберваль сравнивал ее с длиной дуги параболы.

У Роберваля есть исследования по алгебре (частные случаи теоремы Виета), геометрии (вывод уравнений конических сечений), механике, астрономии. Он изобрел ареометр, мощный пульверизатор для технических целей; весы Роберваля многие годы добротной служили человечеству.

Роберваль в своих суждениях не был свободен от традиций схоластики, но под влиянием опытов или наблюдений становился активным сторонником научно обоснованных выводов. Так было со взглядами его на пустоту. До опытов Торричелли он придерживался средневекового объяснения явления всасывания жидкости боязнью пустоты. Когда Торричелли и Вивiani производили свои опыты, в Риме жил ученик Роберваля Франсуа Вердю, напсавший об этих опытах в Париж. Мерсенн чрезвычайно заинтересовался опытами и решил отправиться в Италию, чтобы наблюдать за ними на месте. Он неоднократно присутствовал при опытах Торричелли и тщательно обследовал приборы, на которых ставились опыты. По возвращении в Париж он подробно описал все увиденное и сам повторил опыт, что, кстати сказать, оказалось осуществить нелегко, потому что в Париже не было искусных стеклодувов и достаточного количества ртути.

Роберваль, наблюдавший опыт Мерсенна, из сторонника воззрений Аристотеля превратился в ревностного защитника мнений Торричелли и Паскаля. Роберваль писал, что Паскаль проводил опыты перед аудиторией, состоящей из последователей Аристотеля, «и бедные недоучки сидели с заткнутыми ртами. Они надеялись, что результаты опытов будут противоположными».

Роберваль был идейным противником Декарта и во

всех дискуссиях по научным вопросам выступал на стороне его оппонентов. Он искал случаи, чтобы сразиться с Декартом, нападать на него, подвергать насмешкам. Если еще учесть, что и Декарт слыл достаточно колючим, то можно полагать, что форма их взаимоотношений носила нервный характер.

Биограф Декарта писал, что из всех ученых Декарт больше всего опасался Роберваля. Высказывались предположения, что придирки Роберваля были одной из причин, вынудивших Декарта покинуть Париж и поселиться в Голландии. И все-таки, при такой поляризации, в архиве Роберваля обнаружили 74 письма Декарта. Значит, находились предметы для разговоров.

Роберваль славился как первоклассный лектор; лекции его отличались не только глубоким содержанием, но и доступностью. Иногда на них присутствовало свыше ста человек; это тем более значительно, если учесть, что богословие, философия и правоведение тогда стояли выше точных наук.

Как уже говорилось, Роберваль занимал два профессорских места: в коллеже Мэтр Жерве и в Коллеж де Франс. После смерти П. Гассенди он занимал в том же коллеже и его кафедру.

Нужно еще иметь в виду и то, что ему приходилось читать математику, включающую арифметику, геометрию, астрономию и теорию музыки, читать также оптику, механику и географию; все это в одном коллеже. Безусловно, такое разнообразие требовало значительной затраты энергии.

Роберваль входил в число семи ученых, основавших Парижскую академию наук, и стал ее членом. Он был деятельным академиком: постоянно выступал с докладами, участвовал в обсуждении сообщений других, тщательно выполнял поручения академии.

Творческая работа, подготовка и издание своих сочинений, участие в научных собраниях, диспутах, чтение лекций, большая научная переписка — все это целиком поглощало время Роберваля.

При жизни Роберваля опубликованы его «Механика» и книга по астрономии — «О системе мира, о его частях и свойствах. Аристарха из Самоса». Роберваль, помня о гонениях на Галилея и его мытарствах, представил читателям свое сочинение как перевод арабской рукописи Аристарха, астронома древности, считавшего, что Солнце неподвижно, а земля вращается вокруг него

Оставшиеся после Роберваля неизданные сочинения вошли в VI том «Мемуаров Парижской академии наук» за 1693 г.

10

Вместе с развитием интересующей нас идеи к ее совершенствованию подключается все больше выдающихся математиков, но до формулировки идеи и до того времени, когда будут произнесены и войдут в обиход слова «интеграл», «интегральное исчисление», еще далеко. Математика к этому не была готова. Решение частных задач создавало фундамент, на котором впоследствии и было воздвигнуто величественное здание интегрального исчисления.

Гениальный Паскаль внес значительный вклад в развитие интегральных методов и всей математики. «Паскаль с полной ясностью проник в существо интеграционного процесса, заметив, что всякое интегрирование сводится к определению некоторых арифметических сумм. Уже в работе 1654 г. «Сумма степеней чисел» (опубликована в Париже в 1665 г.) он заявил, что всем, кто сколько-нибудь разобрался в учении о неделимых, должна быть ясна зависимость между суммами степеней и измерением криволинейных площадей... Паскаль подошел к определению интеграла ближе всех своих современников» [8, с. 106].

Блез Паскаль родился 19 июня 1623 г. в городе Клермон-Ферране, в Оверни, близ отрогов Овернских гор — Пюи-де-Дом, в дворянской семье. Отец его, Этьен Паскаль, был человеком высокой культуры — хорошо знал языки, литературу, историю, философию, физику, увлекался геометрией; его имя сохранилось в математике: одна из кривых четвертого порядка названа улиткой Паскаля.

В семье было трое детей: две дочери и сын. Блез с детства отличался слабым здоровьем, поэтому отец решил не перегружать его серьезными занятиями математикой, латинским и греческим языками, а постепенно знакомил с географией, историей, грамматикой. Этьен Паскаль рано обнаружил исключительную одаренность сына и принял решение посвятить себя воспитанию детей и занятиям любимой геометрией. С этой целью он, по обычаям того времени, продал свою должность судьи в Клермоне и в 1613 г. переехал с семьей в Париж, где включился в работу кружка Мерсенна.

Однажды Блез попросил отца рассказать ему о геометрии. Отец в общих чертах объяснил, что в геометрии изучаются различные фигуры, соотношения между ними и их элементами. Этого оказалось достаточно, чтобы возбудить фантазию Блеза: он самостоятельно открыл несколько теорем Евклида. Отец, случайно заставший сына за занятиями геометрией, был потрясен, увидев различные чертежи на полу, на стенах и подоконниках, которые мог изобразить только осведомленный в геометрии человек. Он немедленно изменил намеченный план обучения и дал Блезу «Начала» Евклида, которые юноша прочитал самостоятельно; мало того, он дополнял их, комментировал. Так начиналось знакомство Паскаля с математикой.

Описанный эпизод привел к тому, что 13-летний Блез стал вместе с отцом посещать ассамблеи кружка Мерсенна и обсуждать на них различные проблемы.

В возрасте 16 лет Блез написал «Опыт конических сечений». Это был конспект большого трактата, над которым Паскаль тогда работал, но так до конца и не довел.

В 1641 г. Этьен Паскаль получил должность интенданта в Руане и вместе с семьей переехал в Руан. По роду службы Этьену приходилось выполнять большой объем вычислений. У помогавшего ему Блеза возникла идея создать счетную машину. Он начал работать над ней в 1642 г., и через три года она была готова; 22 мая 1649 г. Паскаль получил па свою счетную машину королевскую привилегию, устанавливающую его приоритет и дающую ему право изготавливать и продавать такие машины. В Париже в роли маклера должен был выступать Роберваль.

Счетная машина прославила Паскаля, но распространения не получила ввиду сложности и дороговизны. У Паскаля же напряженная работа над ней вызвала резкие головные боли, не прекращавшиеся с тех пор.

В октябре 1646 г. Паскали получили известие от Мерсенна об опытах, проводимых в Италии. С этого времени 23-летний Паскаль обратился к исследованиям, связанным с атмосферным давлением. Он ставил опыты сначала в Руане перед жителями города, в сентябре 1647 г. — в Париже перед группой ученых, среди которых были Мерсенн, Роберваль, Декарт, приехавший из Голландии по делам.

Паскаль не только повторял опыты Торричелли.

Видя объяснение подъема ртути в трубке в воздействии атмосферного давления, он пришел к выводу, что на различных высотах уровень ртути в трубке должен быть разным. Так у него возникла идея «опыта на горе». Он вспомнил о горе Пюи-де-Дом, высотой около 1,5 км, и отправил письмо в Клермон-Ферран Флорену Перье, мужу сестры. Он написал, как следует поставить опыт: у подножья горы и на ее вершине сравнить уровень ртути в трубке. Перье провел опыт 19 сентября 1648 г. и получил предсказанный Паскалем результат.

В эти годы Паскаль выдержал жесткую дискуссию с иезуитами по поводу боязни пустоты, открыл известный всем закон Паскаля, говорящий о том, что давление в жидкости распространяется во все стороны одинаково, высказал идею высотомера, гидравлического пресса. Д'Аламбер писал, что труды Паскаля об атмосферном давлении и равновесии жидкостей «открыли нам новую науку».

К тридцати годам творческий дар Паскаля проявился во всем блеске, но религия украла у науки этого гения. Дидро писал: «Паскаль, отравленный религиозными убеждениями, измучил свое сердце и ожесточился. Он довел до отчаяния сестру, которую любил и которая нежно любила его, и все из опасения, что чувство, столь естественное и столь сладостное, отнимет у них обоих частицу той любви, которую они должны были отдавать богу. Ах, Паскаль, Паскаль»¹³. Однако не следует думать, что все происходило прямолинейно — шла великая борьба духа.

В 1646 г. у Паскаля наблюдалось нервное расстройство, и врачи запретили ему заниматься наукой. После возвращения из Руана в Париж Паскаль познакомился с увлекающимися науками герцогом де Роанше и кавалером де Мере. Де Мере интересовался задачами, связанными с игрой в кости. Ему приписывают постановку нескольких задач.

Де Мере предпринял попытки решить их, но пришел к противоречию и обратился за помощью к Паскалю, который нашел решения и об одной задаче написал Ферма. Ферма решил ее другим способом, что вызвало восторг Паскаля: «Истина одна и та же и в Париже, и в Тулузе», — воскликнул он.

Так Паскаль и Ферма открыли основные теоремы теории вероятностей и заложили основы этой науки.

Тогда же Паскаль написал трактат об арифметическом треугольнике, состоящем из чисел сочетаний.

В 1651 г. скончался Этьен Паскаль. Тяжелые мысли о бренности существования терзали Блеза Паскаля. В эти дни его сестра Жаклина ушла в монастырь Пор-Рояль, оплот янсенизма.

В ноябре 1654 г. Паскаль испытал потрясение, оказавшее влияние на его дальнейшую судьбу. Он отправился с друзьями в коляске на прогулку. Вблизи деревни Нейи, недалеко от Парижа, пришлось проезжать по мосту через Сену. Мост ремонтировался, в средней его части не было перил. Лошади чего-то испугались, рванулись и упали с моста в воду. Произошло невероятное: построжки оборвались, и коляска остановилась на самом краю моста. Паскаль, видевший свалившихся в реку лошадей, потерял сознание. Возбужденный ум Паскаля воспринял спасение как указание свыше. Он прекратил научную деятельность и навсегда поселился в Пор-Рояле.

Здесь он включился в борьбу с иезуитами в защиту атакованного ими янсенизма и Антуана Арно, вождя янсенистов. Паскаль написал знаменитые «Письма к провинциалу», нанесшие сильнейший удар иезуитам. Он задумал также большую книгу — «Анология христианства». Завершить замысел Паскаль не успел, но оставил много записей. После его смерти они были изданы под названием «Мысли». «Письма к провинциалу» и «Мысли» — классические образцы французской литературы.

А здоровье Паскаля все убывало. Как-то весной 1658 г. ночью он страдал от зубной боли. Чтобы отвлечься, он стал думать о циклоиде, о которой еще раньше ему говорил Мерсенн. Мысли так захватили Паскаля, что зубная боль отступила; перед ним вставали одна теорема за другой. Утром он сообщил о своем озарении герцогу де Роанне, тоже добровольному отшельнику Пор-Рояля; герцог предложил изложить результаты на бумаге. Работа заняла полных восемь дней.

В июне объявили анонимный конкурс — предлагалось решить шесть задач, связанных с циклоидой и телями, полученными при ее вращении. Премия победителю составляла 60 пистолей — значительную сумму по тем временам. П. Каркави вместе с Робервалем должен был выявить победителя. Все задачи решил Дж. Валлис, но допустил неточности, Х. Гюйгенс

решил четыре, К. Рен выполнил спрямление дуги циклоиды. Победителем конкурса стал Б. Паскаль, премию он употребил на печатание серии трактатов, в которые включил исследование рулетты, работы, связанные с квадратурами, кубатурами и другими вопросами инфинитезимальных вычислений.

Два последних года жизни Паскаля были крайне тяжелыми: к прогрессирующим болезням добавились душевные страдания. Паскаль жил только «спасением души», лишил себя пищи, воды, сна. Он осудил занятия наукой, отрекся от написанных им трудов. На голом теле носил пояс с торчащими гвоздями; при появлении какой-либо мысли ударял по нему локтем и вонзал гвозди в себя, изгоняя недостаточно пiousную мысль. В подкладку камзола зашил «амулет» — кусок пергамента с написанными им «святыми заклинаниями». Умер Паскаль 19 августа 1662 г. на сороковом году жизни. Сестра Паскаля Жюльберта написала довольно полную биографию брата. Первое собрание сочинений Паскаля вышло в 1779 г.

Интегрирования Паскаля связаны с суммированием n -х степеней натуральных чисел. Он писал: «Те, кто хотя бы в малой мере разбирается в учении о неделимых, не преминут усмотреть, что можно извлечь из предыдущих результатов для определения криволинейных площадей. Эти результаты позволяют немедленно квадрировать параболы всех видов и бесконечно много других кривых.

Если мы распространим на непрерывные величины те результаты, которые найдены для чисел по методу, изложенному выше, мы сможем высказать следующие правила.

Правила, относящиеся к прогрессии натуральных чисел, начинающейся с единицы.

Сумма некоторого числа линий относится к квадрату наибольшей линии, как 1 к 2.

Сумма квадратов тех же линий относится к кубу наибольшей, как 1 к 3.

Сумма их кубов относится к четвертой степени наибольшей, как 1 к 4.

Общее правило, относящееся к прогрессии натуральных чисел, начинающейся с единицы.

Сумма одинаковых степеней некоторого числа линий относится к непосредственно следующей степени наибольшей из них, как единица к показателю этой степени.

Я не буду останавливаться на других случаях, так как здесь не место их изучать. Достаточно того, что мною попутно сформулированы указанные выше правила. Нетрудно найти и другие, опираясь на тот принцип, что непрерывная величина не увеличивается от прибавления к ней любого числа величин низшего порядка.

Так, точки ничего не добавляют линиям, линии — поверхностям, поверхности — телам. Или (чтобы перейти к числам, как и принадлежит в арифметическом трактате) первые степени ничего не дают по сравнению с квадратами, квадраты — по сравнению с кубами и кубы — по сравнению с квадратами квадратов. Так что должно пренебрегать, как нулями, количествами низшего порядка.

Я хотел прибавить эти несколько замечаний, знакомых тем, кто пользуется неделимыми, чтобы выявить всегда вызывающую восхищение связь, которую проникнутая единством природа устанавливает между предметами, по внешности весьма далекими друг от друга. Такая связь явна в этом примере, в котором мы видим, что вычисление размеров непрерывных величин связано с суммированием степеней чисел» [51, с. 94].

Сказанное соответствует вычислению интегралов от степенных функций при натуральных значениях n :

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Результат не был новым, его знали Кавальери, Ферма. Однако у Паскаля выступают важные особенности: он ведет речь об интегральных суммах и формулирует правило для перехода от сумм с конечным числом слагаемых к суммам, число слагаемых которых бесконечно возрастает, — правило отбрасывания величин высшего порядка малости.

Вычисление площади фигуры, ограниченной, например, кривой CB и отрезками AB и CA (рис. 14). Паскаль производил с помощью разбиения ее на узкие полоски прямыми, параллельными AB или AC ; тем самым он получал аналоги интегральных сумм. Площадь

фигуры тогда выражалась интегралами $\int_0^a y dx$ или

$\int_0^c x dy$, что в современных терминах соответствует замене переменной интегрирования.

Число полосок, на которые Паскаль разбивал фигуру, предполагалось бесконечным. Операция разбиения на такие малые части с последующим суммированием их оказывалась применимой к любым величинам.

В «Трактате о синусе четверти круга» Паскаль ввел характеристический треугольник. Выберем на дуге BC (рис. 14) произвольную точку D и проведем через нее касательную к дуге. Отложим от точки D равные дуги DF и DF' и через концы их проведем перпендикуляры ER и $E'R'$ к AC . Построим треугольник EKE' . Соединим точки A и D , а также проведем $DI \perp AC$. Треугольники ADI и EKE' подобны. Отсюда $AD/DI = E'E/EK = E'E/RR'$.

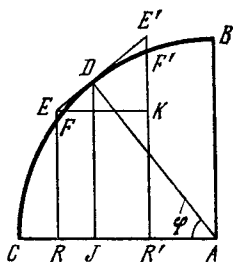


Рис. 14

Основываясь на полученном равенстве, Паскаль доказал теорему: «сумма синусов равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус» (здесь имеется в виду, что каждый «синус» умножается на соответствующую малую дугу). Чтобы доказать теорему, запишем равенство $DI \cdot E'E = RR' \cdot AB$ и просуммируем по всему отрезку AC ; получим $\sum DI \cdot E'E = AB \cdot \sum RR'$. Но $\sum RR' = AC$, поэтому $\sum DI \cdot E'E = AB \cdot AC$, что и утверждалось в теореме.

Обозначим $BD = s$, $ID = y$, $AI = x$ и запишем результаты Паскаля так: $yds = rdx$, $\int_0^s yds = \int_0^x rdx$.

Это дает интегралы

$$\int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi = 1 - \cos \varphi, \quad \int_0^\psi \cos \psi d\psi = \sin \psi,$$

где $\varphi = \angle DAI$, $\psi = \angle DAB$.

Паскаль при вычислении квадратур, кубатур и центров тяжести фигур, связанных с циклоидой, а также кубатур «цилиндрических копыт» получил еще некоторые интегралы.

«Трактат о синусе четверти круга» оказал значительное влияние на Лейбница, который по совету Гюйгенса ознакомился с ним в 1673 г. Лейбниц заметил, что характеристический треугольник применим к любым кривым.

11

Принципиально важный шаг в развитии интегральных методов связан с творчеством Валлиса. Достижения Валлиса в математике состоят в арифметизации инфинитезимальных методов, широком применении неполной индукции, получении новых формул интегрирования функций, обобщении понятия показателя степени, разработке основ метода пределов, представления числа π в виде бесконечного произведения, обобщении понятия факториала. Вопросы, связанные с интегрированием, Валлис изложил в «Арифметике бесконечных», изданной в 1656 г. в Оксфорде на латинском языке.

Джон Валлис родился 23 ноября 1616 г. в г. Эшфорде (Восточный Кент). Отец его был приходским священником. Начальное образование Валлис получил в частных школах, в 1632 г. поступил на богословский факультет Кембриджского университета. Математику он изучал самостоятельно: читал «Ключ математики» В. Отреда (1575—1660), «Практику искусства анализа» Т. Гарриота (1560—1621), труды Евклида, Архимеда, Аполлония, «Геометрию» Декарта. С методом неделимых Кавальери Валлис ознакомился по «Геометрическим трудам» Торричелли. «В 1650 г. — писал он, — я изучал математические труды Торричелли, в которых среди других вопросов излагается „Геометрия неделимых“ Кавальери. Самого Кавальери я не имел в руках, хотя несколько раз тщетно искал у книготорговцев. Метод Кавальери, изложенный у Торричелли, мне как-то особенно понравился, ибо в нем я почувствовал какую-то силу, которая тянула меня к математике. И я увидел, что то, что содержалось у большей части авторов о круге (которые заменяли круг многоугольником с бесконечным числом сторон, и таким образом окружность представлялась посредством бесконечного числа бесконечно коротких прямых), *mutatis mutandis* *, может быть приспособлено с пользой и для других проблем» ¹⁴.

* При надлежащих изменениях.

После окончания университета Валлис успешно справлялся с обязанностями капеллана сначала в Кембридже, а с 1643 г. — в Лондоне, где быстро получил известность и был избран секретарем собрания богословов, что позволило ему войти в кружок естествоиспытателей, начавший функционировать в Лондоне в 1645 г. На основе этого кружка в 1662 г. сформировалось Лондонское королевское общество, одним из учредителей которого был Валлис. Он оставался ведущим математиком Королевского общества в период до Ньютона.

Подобно тому как Виет при дворе французских королей расшифровывал перехваченные секретные донесения врагов короля Валлис успешно занимался расшифровкой криптограмм и служил своим искусством правительству. В бытность капелланом он расшифровывал секретный документ, чем оказал услугу правящей партии, приверженцем которой он оставался и впоследствии, выступая, например, против казни короля. Оливер Кромвель относился к Валлису с уважением и в 1649 г. назначил его профессором кафедры геометрии Оксфордского университета; это место Валлис сохранил за собой и после реставрации и стал, кроме того, королевским капелланом. Все это свидетельствует о том, что Валлис умел уживаться с противоположными политическими течениями, господствовавшими в Англии тех времен. По настоянию Валлиса в Англии по был введен григорианский календарь, чтобы избежать усиления влияния Рима.

Валлис обладал феноменальной памятью и способностью производить вычисления. Однажды в бессонную ночь он вычислил в уме 27 цифр квадратного корня из 53-значного числа, запомнил их и утром записал.

В геометрический метод неделимых Валлис внес усовершенствование, основанное на полученных к тому времени достижениях алгебры и аналитической геометрии, и дополнил его неполной индукцией и методом пределов. К 1652 г. он построил теорию конических сечений на основе алгебры и в 1656 г. издал «Трактат о конических сечениях, изложенных по новому методу».

Тогда же он вычислил интегралы $\int_0^a x^n dx$ при целых и дробных положительных и отрицательных показателях степеней.

Видимо, Валлис не знал о работах Ферма и Робер-
валя по вычислению интегралов $\int_0^a x^n dx$. Он напи-
сал, что «за эти проблемы, насколько нам известно,
еще никто не брался...». Связь между Ферма и Валли-
сом шла через жившего в Париже англичанина К. Диг-
би; 20 апреля 1657 г., спустя год после выхода «Ариф-
метики бесконечных», Ферма писал Дигби, что он про-
читал «Арифметику бесконечных» и «проникся боль-
шим уважением к ее автору». В письме к Дигби 2 июня
1657 г. Валлис признавался, что, к его стыду, он к то-
му времени, когда получил свои результаты, даже не
слышал имени Ферма.

Затем Валлис обратился к задаче квадратуры кру-
га, что соответствовало вычислению интегралов
 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ и $\int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx$. Убедившись в том, что
он не обладает необходимыми средствами для решения
задачи, Валлис обратился к знакомым математикам.
Ему посоветовали изучить «Геометрический труд» Гри-
гория Сен Венсана, но Валлис сам получил результаты,
найденные Григорием Сен Венсаном.

Кроме «Арифметики бесконечных», Валлис опубли-
ковал «Всеобщую математику или полный курс ариф-
метики» (1657), содержащий построенную на основе
арифметики алгебру, «Трактат о циклоиде» (1659), по-
священный решению поставленных Паскалем задач
(Валлис решал их методом исчерпывания), «Трактат
о циссоиде» (1659) — в виде письма Гюйгенсу, предло-
жившему найти площадь, ограниченную циссоидой и ее
асимптотой, что соответствовало вычислению интеграла
 $\int \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$, определить центр тяжести и объем тела,
полученного при вращении циссоиды около ее асимпто-
ты; работы по механике (об ударе и о движении), рабо-
ту «Алгебра, исторический и практический трактат»
(1685), где указал на возможность геометрического ис-
толкования мнимых чисел и операций над ними. В до-
бавление ко всему этому Валлис переводил древних
авторов.

«Арифметика бесконечных» Валлиса вышла пример-
но за 10 лет до создания работ Ньютона «Анализ с по-
мощью уравнений с бесконечным числом членов» и «Ме-

тод флюксий». Ньютон не опубликовал свои математические работы. О содержании их Валлис узнал из двух писем Ньютона Ольденбургу и изложил основные идеи «Метода флюксий» в «Алгебре», стараясь сделать достоянием математических кругов важнейшие открытия Ньютона.

Ньютон высоко ценил Валлиса. «В начале моего изучения математики,— писал он,— я обратил внимание на рассмотрение рядов в сочинении нашего знаменитого Валлиса, интерполированием которых он получал площади кругов и гипербол...»

Валлис написал также трактат для обучения разговору глухонемых, много сочинений богословского и философского содержания. Он умер 28 октября 1703 г. Его собрание сочинений опубликовано в 1693—1699 гг.

Полное название интересующего нас сочинения Валлиса — «Арифметика бесконечных или новый метод исследования квадратуры криволинейных фигур и других более трудных математических проблем». Структура его обычна для математических трактатов: леммы, теоремы, следствия (короллarii), поучения (схолии). В леммах ставились задачи и на примерах давались их решения; результаты распространялись по индукции и формулировались в виде правил-теорем, затем получались следствия.

Постановку задачи о квадратурах и общий подход к ее решению Валлис впервые осуществил в трактате о конических сечениях; в «Арифметике бесконечных» он обобщил прием и приложил его к кубатурам. В начале трактата о конических сечениях Валлис рассмотрел три треугольника, в которые вписывал и около которых описывал ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников или параллелограммов одинаковой высоты. Он писал: «Все эти параллелограммы, вместе взятые, образуют фигуру, описанную или вписанную в треугольник, и чем больше будет в такого рода описанной или вписанной фигуре параллелограммов, тем с меньшим избытком или недостатком будет отличаться эта фигура от треугольника, для которого она построена. Следовательно, если предположить число параллелограммов бесконечным, то эта разность будет бесконечно малой, т. е. нулевой. Поэтому будем полагать, что построенная таким образом для треугольника (образованная из бесконечного числа параллелограммов) фигура равна треугольнику или такая же, как

треугольник. По этому же закону правильный многоугольник с бесконечным числом сторон (вписанный или описанный) обыкновенно принимается за круг»¹⁵.

Существенное отличие метода Валлиса от метода древних состояло в том, что он находил площадь непосредственным суммированием площадей вписанных или описанных прямоугольников, древние же пользовались вписанными и описанными фигурами лишь для доказательства того, что разность между ними и рассматриваемой фигурой может быть сделана как угодно малой.

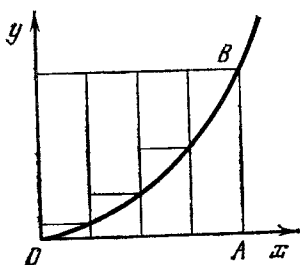


Рис. 15

Валлис воспользовался тем, что квадратуры и кубатуры можно получать, вычисляя пределы отношений арифметических сумм. Например, при вычислении отношения площади криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^k$, к площади соответствующего прямоугольника или параллелограмма, он поступал так (рис. 15).

Пусть речь идет о нахождении площади фигуры, ограниченной параболой, осью Ox и ординатой AB . Валлис разбивал интервал OA на равные части и на ординатах, построенных в точках деления, строил прямоугольники. Затем отыскивал отношение суммы площадей этих прямоугольников к суммам площадей прямоугольников, площади которых одинаковы и равны площади наибольшего из прямоугольников первой группы, т. е.

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \dots + n^k} = \frac{\sum_{m=0}^n m^k}{(n+1)n^k}.$$

Это можно истолковать как постановку общей задачи интегрирования функций и построения абстрактного понятия интеграла. Валлис писал:

Предложение 1. Лемма. Пусть предложен ряд арифметически пропорциональных величин, начинающихся от точки или 0 (цифра или ничто) и непрерывно возрастающих (например, 0, 1, 2, 3, 4 и т. д.); требуется найти отношение их суммы к сумме стольких же величин, равных наибольшей, т. е. отношение $(0 + 1 + 2 + \dots + n)/(n + n + n + \dots + n)$.

Свой метод Валлис поясняет так: «Наиболее простой способ исследования как в этой, так и в нескольких следующих задачах состоит в том, чтобы следить до некоторой поры за самим ходом дела, наблюдать получающиеся отношения и сравнивать их друг с другом, чтобы в конце концов по индукции стало ясным общее предположение». Он нашел значения отношения для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Оно постоянно и равно $1/2$. Валлис заключил: «Таким образом, сколько бы мы ни продвигались, всегда будем получать отношение, равное $1/2$. Итак, имеем:

Предложение 2. Теорема. Если берется ряд арифметически пропорциональных величин (в натуральной последовательности чисел), начинающихся с точки или 0 и непрерывно возрастающих, конечных или бесконечных по числу (ведь никакой причины нет, чтобы разделять эти случаи), то он будет так относиться к ряду стольких же наибольших величин, как 1 к 2».

Это в современных терминах запишется в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 1 + 2 + \dots + n}{n + n + n + \dots + n} = 1/2.$$

Затем Валлис истолковал найденное отношение как отношение площади треугольника к площади параллелограмма, имеющего одинаковые с треугольником основания и высоту.

После этого Валлис обратился к нахождению интеграла от x^2 , т. е. получению отношения

$$(0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2)/(n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2)$$

при $n \rightarrow \infty$.

«Будем вести исследование,— писал Валлис,— методом индукции (как в первом предположении). Получим:

$$(0 + 1)/(1 + 1) = 1/2 = 3/6 = 1/3 + 1/6,$$

$$(0 + 1 + 4)/(4 + 4 + 4) = 5/12 = 1/3 + 1/12,$$

$$(0 + 1 + 4 + 9)/(9 + 9 + 9 + 9) = 14/36 = 7/18 = 1/3 + 1/18,$$

$$(0 + 1 + 4 + 9 + 16)/(16 + 16 + 16 + 16 + 16) = 30/80 = 3/8 = 1/3 + 1/24,$$

$$(0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25)/(25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25) = 55/150 = 1/3 + 1/30$$

и так далее.

Полученные отношения повсюду больше, чем отношение 1 к 3. Избыток же постоянно уменьшается по мере того, как число членов увеличивается; так, мы имеем: $1/6$, $1/12$, $1/18$, $1/24$, $1/30$ и т. д., где знаменатель дроби возрастает от одного места к другому, как очевидно, на число 6. Таким образом, избыток получающегося отношения над отношением 1 к 3 равен отношению единицы к шестикратному числу членов, следующих после нуля... Когда же число членов будет возрастать, этот избыток над $1/3$ будет непрерывно уменьшаться, так что наконец станет менее произвольно заданного числа; а если мы будем увеличивать число членов до ∞ , то этот избыток совершенно исчезнет»¹⁶.

Значит:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2} = 1/3.$$

Результат Валлис сформулировал в виде правила-теоремы XXI: «Пусть предложен бесконечный ряд количеств, арифметически пропорциональных в двойном отношении (или так, как в ряде квадратных чисел), непрерывно возрастающих, начиная от точки или 0, ряд этот относится к ряду стольких же количеств, равных наибольшему из предложенных, как 1 к 3»¹⁷.

В современных терминах это правило равнозначно тому, что

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3}.$$

После формулировки правила-теоремы XXI Валлис находит объемы конуса и пирамиды через объемы цилиндра и призмы с такими же основаниями и высотами, потому что конус и пирамида состоят из бесконечного множества фигур, «подобных и параллельных, составляющих ряд количеств, арифметически пропорциональных в двойном отношении, наименьшее из которых — точка, наибольшее — основание». Затем приводится квадратура параболы и даются многие другие примеры.

Выполнив соответствующую процедуру над отношением «ряда» кубов чисел к сумме кубов наибольшего чис-

ла из предыдущего «ряда», Валлис нашел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 + \dots + n^3} = 1/4,$$

что означает $\int_0^1 x^3 dx = 1/4$.

По индукции Валлис записал для любых натуральных показателей результат, совпадающий с современным

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

«В самом деле, — писал он, — сделав испытания, мы увидим, что найденные по индукции отношения будут подходить к указанным... так, что разность, наконец, станет меньше наперед заданной величины, поэтому при продолжении до бесконечности она исчезнет».

Валлис не считал сказанное доказательством и упомянул, что полное обоснование можно дать по методу древних или найти новые способы доказательства. Он сослался на неравенства

$$n^2 a/2 < a + 2a + 3a + \dots + na < (n+1)^2 a/2,$$

$$n^3 a/3 < a^2 + (2a)^2 + \dots + (na)^2 < (n+1)^3 a/3,$$

с помощью которых Архимед получил

$$\int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}, \quad \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \text{ }^{18}.$$

Результаты, равносильные вычислению $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, Валлис записал в виде таблиц.

Представляет интерес переход от натурального показателя к показателю вида $1/n$. Рассуждения таковы. Отношение площади «под параболой» $y = x^2$ к площади соответствующего прямоугольника равно 1 к 3; следовательно, отношение площади «над параболой» к площади того же прямоугольника равно 2 к 3; таким образом, осуществлен переход от «ряда» $0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ к «ряду» $0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$, т. е. вычислен интеграл $\int_0^1 x dy = \int_0^1 y^{1/2} dx = \frac{2}{3}$. И получено это из геометрии

ческих соображений, основанных на том, что интегралы $\int_0^y x dx$ и $\int_0^x y dx$ интерпретируются как площади фигур, дополняющих друг друга до прямоугольника xy , разделенного кривой $y = f(x)$: $\int_0^y x dy = xy - \int_0^y y dx$.

Этим свойством Валлис пользовался для получения интегралов от $y^{1/3}$, $y^{1/4}$, $y^{1/5}$, $y^{1/6}$.

Когда Валлис перешел к исследованию случая $y = x^{m/n}$ (а вместе с этим ему пришлось заниматься обобщением понятия показателя степени — «индекса», как называл его он сам), индукция к успеху не привела. Вот здесь и возникла интерполяция функций (термин введен Валлисом).

Чтобы получить хотя бы приблизительное представление о трудностях, которые пришлось преодолевать Валлису при решении поставленных проблем, следует вспомнить, что тогда не было даже интуитивного представления функции и развитой символики. Результаты, связанные с тем, что мы называем интегралом, с тем, что он называл «рядом», с последовательностями, он помещал в таблицы и устанавливал по ним те или иные закономерности. Надо думать, нелегко было это делать. А нам, привыкшим к современному емкому и лаконичному математическому языку, понимать работы предшественников крайне трудно.

Интерполяция Валлиса на этом этапе исследования сводилась к вставке средних арифметических и средних геометрических величин между известными величинами.

Ее можно пояснить так. Известны интегралы $\int_0^1 x^0 dx = \frac{1}{1}$, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Введем обозначения знаменателей $i_0 = 1$, $i_1 = 2$ и поставим задачу вычислить $\int_0^1 x^{1/2} dx = 1/i_{1/2}$ интерполяцией между i_0 и i_1 . Вставим между x^0 и x^1 две средние геометрические и получим: x^0 , $x^{1/3}$, $x^{2/3}$, x . Показатели степеней их («индексы») образуют арифметическую прогрессию 0, 1/3, 2/3, 1. Вставим теперь между знаменателями $i_0 = 1$ и $i_1 = 2$

также две средние арифметические $4/3$ и $5/3$. Сравним полученные арифметические прогрессии из показателей степеней и знаменателей: $0; 1/3; 2/3; 1$ и $1; 4/3; 5/2; 2$. Показателю $1/3$ соответствует знаменатель $4/3$, поэтому $\int_0^1 x^{1/3} dx = 3/4$. Найдём также и $\int_0^1 x^{2/3} dx = 3/5$ [13, с. 183].

После вычисления других подобных интегралов Валлис сформулировал правило, эквивалентное $\int_0^1 x^{m/n} dx = m/(n+m)$. Он заметил, что показатель может быть и иррациональным.

После этого Валлис обратился к исследованию квадратур гипербол $y = x^{-n}$ (в случаях $n \neq 1$), квадратуры круга и вычислению интегралов $\int (ax^l \pm x^k)^n dx$. С помощью сложных интерполяций с факториалами дробных величин он получил выражение интеграла $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$, дающего площадь полукруга с диаметром 1. Это привело его к знаменитой формуле

$$4/\pi = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots / 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots$$

Он впоследствии указал, что число $4/\pi$ невозможно представить в виде комбинации корней и оно, по современной терминологии, трансцендентное.

Валлис применил свой метод к вычислению площади, ограниченной циссоидой Диоклеса и ее асимптотой, что равносильно вычислению интеграла $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$.

Эту задачу предложил ему Гюйгенс для проверки эффективности разработанного Валлисом метода. Гюйгенс, придерживающийся строгих доказательств, был удивлен тем, что столь необоснованные средства быстро приводят к цели.

«Арифметика бесконечных» оказала влияние на современников Валлиса Дж. Грегори и Ньютона, пользовавшегося в своих исследованиях по теории рядов неполной индукцией и интерполяцией. Неполную индукцию применял и Эйлер, хотя ее и критиковал еще Ферма. К полной индукции, открытой Паскалем, математики того времени прибегали редко. Лейбниц по этому

поводу писал в 1695 г.: «Признаюсь, что я высоко ценю прилежание тех, которые всегда стараются свести строжайшим образом к первоосновам и нередко уделяют все свое внимание таким вещам; но я не советовал бы вести рассуждения так, чтобы излишняя скрупулезность служила преградой искусству нахождения решения или чтобы по такого рода основаниям отказывались от блестящих открытий и лишали самих себя их результатов».

У Валлиса были и другие достижения, получившие дальнейшее развитие. В частности, через 75 лет после выхода «Арифметики бесконечных» Эйлер на основании

исследования Валлисом интеграла $\int_0^1 (1 - x^{1/q})^p dx$ разработал теорию бета- и гамма-функций.

Закончим обзор творчества Валлиса характеристикой, данной ему Д. Я. Стройком: «Валлис был только одним из целого ряда блестящих представителей этого периода, обогащавших математику одним открытием за другим. Движущей силой в этом расцвете творческой науки, не имевшем себе равного со времен величия Греции, было не только то, что новой техникой можно было легко пользоваться. Многие крупные мыслители искали большего — «общего метода», который иной раз понимали в ограниченном смысле, как метод математики, иной раз понимали шире — как метод познания природы и создания новых изобретений. Это было причиной того, что в рассматриваемую эпоху все выдающиеся философы были математиками и все выдающиеся математики были философами» [34, с. 140].

12

И все же, как яв значительны достижения математиков в нахождении различных интегралов, основным открытием в инфинитезимальных методах до Ньютона и Лейбница следует считать установление взаимной обратности операций, называемых нами дифференцированием и интегрированием (тогда — проведение касательных и нахождение квадратур), осуществленное в работах Дж. Грегори и И. Барроу. Остановимся на вкладе Барроу, поскольку этот вопрос у него выступает более рельефно и обоснованно.

Исаак Барроу родился в октябре 1630 г. в Лондоне. Отец его — торговец полотном — был ревност-

ным роялистом. Мать Исаака умерла, когда ему было четыре года. Первоначальное воспитание и образование он получил в картезианском монастыре. Ничто не предвещало ему значительного будущего: успехами он не блистал и обладал буйным характером. К счастью, все изменилось, когда на пятнадцатом году его перевели в Кембридж и он поступил в Триптити-колледж (колледж св. Троицы) Кембриджского университета. Дело в том, что его дядя, епископ, был членом совета в колледже св. Петра, и родные Исаака надеялись, что он будет под присмотром дяди. Но ко времени поступления Исаака в университет дядю, как сторонника короля, изгнали из университета, где большинство преподавателей составляли сторонники парламента.

Кембриджский университет состоял из 16 колледжей, учреждавшихся, как и кафедры, нередко на частные средства. Во главе колледжа стоял мастер. Преподавание вели выбираемые на должность младшие преподаватели и профессора. Ученые степени были следующие: первая — бакалавр, вторая — магистр, третья — доктор.

После поступления в университет Барроу пристрастился к изучению древних языков, философии, богословия. Занятия богословием связаны с изучением хронологии, а ею невозможно овладеть без знания астрономии и математики. Вот какой длинный путь привел Барроу к математике. Знание латинского, греческого и арабского языков позволило ему изучить творения древних классиков и впоследствии издавать сочинения Евклида, Архимеда, Аполлония, Феодосия с обширными комментариями.

В 1648 г. Барроу получил степень бакалавра искусств, в 1652 г. — магистра в Кембридже, в 1653 г. — в Оксфорде.

Барроу участвовал в конкурсе на оказавшуюся вакантной кафедру греческого языка, но был забаллотирован, потому что принадлежал к партии роялистов. Ему ничего не оставалось как покинуть родину: он продал библиотеку, взял денег у отца и отправился на четыре года в путешествие; посетил Францию, Италию, год жил в Константинополе, где главным образом изучал труды древних авторов в оригинале и арабских переводах, побывал в Смирне, обратный путь совершил через Италию, Германию, Голландию и в 1659 г. возвратился на родину, где его

положение, как сторонника короля, стало иным — он был избран на ту же кафедру греческого языка.

Дальнейшие события развивались так. В 1663 г. некто Лукас пожертвовал определенную сумму на организацию кафедры математики в Кембриджском университете и выразил желание, чтобы ее занял Барроу, который и стал первым профессором кафедры.

Хотя исследовательская деятельность Барроу в области оптики и геометрии, а также лекции проходили успешно, желание целиком посвятить себя богословию не покидало его. Вскоре и подходящий случай выпал. В 1661 г. в Тринити-колледж поступил Ньютон и в 1663 г. пришел слушать лекции Барроу по оптике. Барроу заметил необыкновенно одаренного Ньютона, они стали сотрудничать: в «Лекциях по оптике» Барроу указывал места, написанные по совету Ньютона. В 1669 г. Барроу передал свою кафедру Ньютону. С тех пор он точными науками не занимался, а лишь готовил и издавал свои труды.

В 1670 г. Барроу получил степень доктора богословия и стал капелланом Карла II, с 1672 г. он возглавляет Тринити-колледж; на этом посту он оставался до конца жизни.

Барроу был скромен и отличался высоким трудолюбием, сокращал до предела время отдыха и сна. Таков же и Ньютон, объяснявший свои успехи главным образом постоянным трудом. Скромность Барроу проявилась и в том, что он не соглашался позировать для портрета, который был все же написан по настоянию друзей, украдкой, когда друзья отвлекали Барроу разговорами.

Однако характер Барроу доводилось проявлять. Когда он на корабле плыл в Смирну, на корабль напали пираты; Барроу оказался единственным пассажиром, который вместе с экипажем храбро отбивал нападение.

Барроу не боялся смерти; перед кончиной он говорил друзьям: «Наконец я узнаю разрешение многих геометрических и астрономических вопросов в лоне божества». Умер Барроу 4 марта 1677 г.

Основные достижения Барроу в математике и оптике изложены в вышедших в 1669—1670 гг. «Лекциях по оптике и геометрии». Он решил задачу о нахождении фокусов оптических стекол, ввел принцип мнимых изображений. Барроу принадлежат также сочинения

богословского и нравственного содержания, много проповедей и речей на различные темы.

Чтобы уяснить, насколько близко подошли предшественники Ньютона и Лейбница к построению понятия интеграла и всего математического анализа, обратимся к двум рассмотрением Барроу.

Барроу усовершенствовал метод Ферма проведения касательной к кривой. Пусть необходимо провести касательную к кривой ANM в точке N (рис. 16). Барроу считал отрезок дуги NM бесконечно малым и строил бесконечно малый «треугольник» NRM , подобный треугольнику TRM . Для проведения касательной нужно, кроме точки N , знать еще точку T , определяющую подкасательную QT .

Дадим аргументу x приращение e (Δx), тогда на кривой будет приращение a (Δy). Обозначим TP через t и MP через m . С точностью до бесконечно малых высших порядков получим

$$MP/TP = a/e, \quad TP = MP/(a/e).$$

Если теперь перейти к пределу при $e \rightarrow 0$, то найдем положение точки T . Переход к пределу Барроу производит по методу Ферма: в уравнении кривой с приращенными координатами отбрасываются все члены выше первого измерения относительно a и e , а также свободные от них после этого a заменяется на $MP = m$ и e на $TP = t$. Составленное таким образом уравнение определяет подкасательную t .

Пусть, например, необходимо провести касательную к параболе $y = Ax^2 + Bx + C$. Выполним все выкладки:

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^2 + B(x + \Delta x) + C,$$

$$y + \Delta y = Ax^2 + 2Ax \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + Bx + \\ + B \cdot \Delta x + C,$$

$$Ax^2 + Bx + C + \Delta y = Ax^2 + 2Ax \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + \\ + Bx + B \cdot \Delta x + C,$$

$$\Delta y = 2Ax \cdot \Delta x + B \cdot \Delta x, \quad m = 2Axt + Bt,$$

$$t = m/(2Ax + B).$$

Наиболее важное достижение Барроу — установление взаимной обратности операций дифференцирования и интегрирования. На рис. 17 изображены

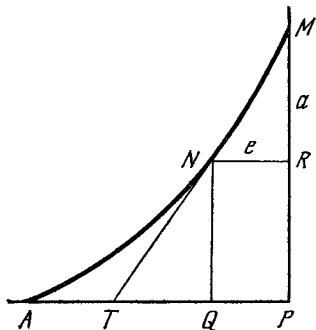


Рис. 16

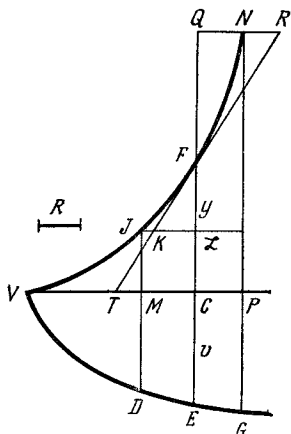


Рис. 17

кривые $VDEG$ и $VIFN$, отнесенные к общей оси VP , причем кривая $VDEG$ задается функцией $v(x)$. Кривая $VIFN$ такова, что любая ее ордината, умноженная на произвольный отрезок R , вводимый для соблюдения требований размерности, дает площадь соответствующей криволинейной трапеции. Например, ординате MI соответствует площадь криволинейной трапеции VMD , ординате CF — площадь VCE и т. д. Тогда из условия $CT : R = CF : CE$ будет следовать, что TFR является касательной к верхней кривой в точке F .

Обозначим $VC = x$, $CE = v$, $CF = y$, $CT = S_T$. Можно записать

$$Ry = \text{пл. } VDEC = \int_0^x v(x) dx. \quad (*)$$

Приведенная выше пропорция дает $y : v = S_T : R$, откуда $v = yR/S_T$. Но, по методу Барроу $S_T = \frac{y}{\lim_{e \rightarrow 0} \left(\frac{a}{e} \right)}$, поэтому $v = R \lim_{e \rightarrow 0} a/e = R dy/dx$. (**)

Сравнивая выражения (*) и (**), приходим к выводу, что основные операции анализа взаимно обратны: интегрирование нижней кривой дает верхнюю кривую, а дифференцирование верхней дает нижнюю, и наоборот. Как видим, в рассуждении Барроу существенно, что прямая TFR — касательная к кривой $VJFN$.

Свойство взаимной обратности операций, выражаемое равенствами (*) и (**), Барроу сначала доказы-

вает кинематически, в чем он примыкает к Торричелли. Кривая $VJFN$ представляет собой путь движущейся точки F . Предполагается, что проекция C точки F на ось VP движется равномерно со скоростью R , а ордината y возрастает со скоростью, изображаемой ординатой v кривой $VDEG$. В современных обозначениях это можно записать так:

$$dx/dt = R, \quad dy/dt = v,$$

где t — время.

В методе Торричелли касательная является диагональю прямоугольника, построенного на указанных скоростях, а это и дает выражение (**) для подкасательной. Кроме того, квадратура, с помощью которой Галилей определил путь, проходимый по прямой со скоростью v , дает зависимость (*) между y и площадью, выражаемой интегралом $\int_0^x v(x) dx$.

Барроу рассмотрел в качестве примера равномерно ускоренного движения изученное Галилеем и Торричелли движение при бросании, когда двумя соответствующими линиями будут парабола $y = gx^2/2R^2$ и прямая $v = gx/R$.

В то время считалось, что доказательство каких-либо утверждений должно даваться в строгой геометрической традиции, и Барроу не ограничился кинематическим доказательством, основанным на понятии движения. Пользуясь рис. 17, он доказывает, что прямая, определяемая условием $CT : R = CF : CE$, будет касательной к кривой $VJFN$. Он называет касательной прямую, имеющую с кривой одну общую точку и обладающую тем свойством, что все достаточно близкие к ней точки прямой лежат по одну сторону от кривой¹⁹.

Рассмотрим точку J кривой $VJFN$ «перед» точкой касания. Запишем $R \cdot LF = R(CF - CL) = R \cdot CF - R \cdot CL = R \cdot CF - R \cdot MJ = \text{пл. } VEC - \text{пл. } VDM = \text{пл. } MDEC$.

По условию $CT : CF = R : CE$. Из подобия треугольников имеем $CT : CF = LK : LF$, поэтому $LK : LF = R : CE$, т. е. $LK \cdot CE = R \cdot LF = \text{пл. } MDEC$. Но $\text{пл. } MDEC < MC \cdot CE$, откуда $LK \cdot CE < MC \cdot CE$, $LK < MC$, $LK < LJ$, т. е. точка J , принадлежащая кривой, находится левее точки K касания.

тельной TFR . Такое же рассуждение относительно точки N , расположенной на кривой «после» точки касания, приводит к тому, что $QR > NR$, откуда следует, что точка N лежит левее точки R . Это и означает, что прямая TFR , по определению Барроу, будет касательной к кривой.

В доказательстве предполагалось, что ордината кривой $VJFN$ вместе с ростом абсциссы x растет, как это видно на рис. 17. Если она будет убывать, то TFR будет все время по другую сторону кривой, т. е. TFR — опять касательная к кривой. Таким образом, доказательство содержит в себе и учет выпуклости кривой и связывает выпуклость с увеличением или уменьшением скорости v , т. е. производной dy/dx .

Если положить $R = 1$, то доказанную теорему можно сформулировать так: из равенства $y = \int_0^x v(x) dx$

следует $dy = v(x) dx$. Это содержится в рассуждении Барроу. В самом деле, приращение площади нижней кривой, т. е. пл. $PCEG$, равно приращению ординаты верхней кривой, т. е. LF . Если точка J неограниченно приближается к точке F , треугольник KLF бесконечно мал и трапеция $PCEG$ прямоугольная, то равенство $LF \cdot R = \text{пл. } PCEG$ дает $dy = v(x) dx$. В другой лекции Барроу доказывает теорему в обратном порядке:

переходит от равенства $dy = v(x) dx$ к $y = \int_0^x v(x) dx$.

Барроу применил теорему о взаимной обратности операций дифференцирования и интегрирования к решению двух видов задач. По известным квадратурам он определял касательные, а также решал обратные задачи, что представляло собой интегрирование дифференциальных уравнений. В частности, он рассмотрел задачу Дебона о квадратуре кривой, удовлетворяющей условию $y/S_T = (x - y)/a$ (S_T — подкасательная), т. е. в современных обозначениях удовлетворяющей уравнению $dy/dx = (x - y)/a$. В свое время в связи с задачей Дебона Декарт высказал сомнение о существовании общего метода решения подобных задач.

Отметим характерные особенности рассмотренного периода развития идеи интеграла. Как видно из предыдущего, первые шаги в этом направлении связаны с решением частных задач — вычислением площадей,

объемов, определением центров тяжести плоских фигур и тел, что и совпадало по существу с нахождением интегралов. В результате усилий математиков понятие интеграла в непривычной для нас форме уже возникло.

Несомненно существенное влияние открытия Барроу взаимной обратности двух основных инфинитезимальных операций на Ньютона, так же как метода неделимых Кавальери и исследований бесконечно малых Паскаля на Лейбница. Но вычислительный алгоритм, позволяющий систематизировать формальные операции счета и освобождающий мысль от лишней нагрузки, еще не был создан. Это выпало на долю двух великих умов, чья деятельность будет рассмотрена в следующей главе.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

1

Теперь мы подошли к решающему этапу в построении понятия интеграла, развития всей математики и научного естествознания, этапу, связанному с именами Ньютона и Лейбница.

Конечно, не следует думать, что математический анализ создан двумя людьми — Ньютоном и Лейбницем. Это было бы упрощением. Развитие математического анализа не начиналось и не завершилось Ньютоном и Лейбницем.

В XVII в. большая группа математиков занималась следующими основными задачами: проведением касательной к кривой, что привело к возникновению дифференциального исчисления, и вычислением квадратур, что повлекло возникновение интегрального исчисления. Заслуга Ньютона и Лейбница состояла в отыскании внутренней связи между этими задачами, синтез которых и был основой для создания мощного орудия науки и научного естествознания.

Исаак Ньютон родился 4 января 1643 г. в Вулсторпе, недалеко от небольшого города Грантема. Отец его, фермер, умер до его рождения, оставшаяся вдовой мать вскоре вышла замуж и покинула Вулсторп, оставив сына на попечении бабушки, Первона-

чальное образование Ньютон получил в деревенской школе, двенадцати лет поступил в школу в Грантеме. Биографы Ньютона рассказывают: однажды в драке его побил сверстник. Ньютон по своему физическому состоянию не мог одолеть обидчика и решил добиться превосходства в учебе. Вскоре он стал первым учеником школы. Кто-то сказал, что не было более удачного действия кулаками.

В 1656 г. мать Ньютона овдовела вторично и с тремя детьми возвратилась в Вулсторп; Ньютону пришлось временно оставить школу и помогать матери в ведении хозяйства; затем он вернулся в школу и летом 1661 г. поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета.

Ньютон, как предполагают, самостоятельно изучил геометрию Евклида и Декарта, алгебру Виета и Отреда, «Арифметику бесконечных» Валлиса. Высказывается мнение о том, что в математическом образовании Ньютона роль Барроу не могла быть значительной: читавшийся им элементарный курс лекций по математике ни в какое сравнение не шел с тем, над чем работал Ньютон самостоятельно [13, с. 216]. Одновременно Ньютон знакомился с современными достижениями в механике, физике, астрономии.

Окончил университет Ньютон в 1665 г. со степенью бакалавра искусств, в 1668 г. стал магистром, а в 1669 г., как уже упоминалось, занял лукасовскую кафедру и читал в университете лекции по математике и физике.

1665 г. стал знаменательным в жизни Ньютона: вспыхнувшая эпидемия чумы, от которой только в Лондоне погибло около 100 тысяч человек, вынудила горожан искать убежища в деревнях, и Ньютон приехал в Вулсторп, где прожил до марта 1667 г. Считается, что за эти два чумных года, когда, по словам Ньютона, он «был в расцвете своих изобретательских сил и думал о математике и о философии больше, чем когда-либо», он обосновал свои математические открытия: метод флюксий, широкое приложение рядов к решению различных задач, применение взаимно обратных операций дифференцирования и интегрирования к новому и систематическому нахождению квадратур. Тогда же у него сложились основные идеи механики и исходные положения теории всемирного тяготения; он успешно занимался также проблемами оптики.

Ньютон сделал основные открытия в анализе раньше Лейбница, но своевременно не публиковал полученные результаты; математические работы его были напечатаны после того, как он стал знаменитым. Задержка и отказ от публикаций объяснялись тем, что Ньютон опасался быть втянутым в полемику в связи с новизной инфинитезимальных приемов. Такая полемика развернулась в 70-е годы вокруг открытий Ньютона в оптике и лишила его покоя. В одном из писем Лейбницу Ньютон сообщал: «Меня так преследовали возражениями и бесконечными запросами, когда я обнаруживал свои идеи о свете, что я решил более этому не подвергаться; из-за этого пустого призрака (публикации и известности. — В. Н.) потерял спокойствие — столь прочное и существенное благо».

По возвращении из Вулсторпа Ньютон продолжал интенсивные занятия математикой, механикой. У него возникла идея создать телескоп-рефлектор, и в 1668 г. он изготовил его; длина трубы составляла 15 см, диаметр зеркала — 2,5 см. Несмотря на незначительные размеры, телескоп давал 40-кратное увеличение, что позволило Ньютону наблюдать Юпитер и Венеру. В 1671 г. Ньютон построил больший зеркальный телескоп и отправил его в дар королю, который для осмотра телескопа пригласил членов Лондонского королевского общества, в том числе Р. Гука и К. Рена. Демонстрация телескопа произвела сильное впечатление. 11 января 1672 г. Ньютона избрали членом Лондонского королевского общества.

Кембриджский университет избрал Ньютона депутатом парламента. В этой роли Ньютон лавров не сыскал. И еще одному виду деятельности довелось ему отдать свое время и энергию — в 1696 г. он был назначен смотрителем Монетного двора в Лондоне; ему пришлось организовать перечеканку всей английской монеты. Ньютону удалось перечеканить монету и изменить технику монетного дела. За эти заслуги в 1699 г. он получил высокооплачиваемое пожизненное место директора Монетного двора.

Основной труд Ньютона — «Математические начала натуральной философии» — вышел в 1687 г. Научный авторитет Ньютона в это время был высок. В 1699 г. его избрали иностранным членом Парижской академии наук, в 1703 г. — президентом Лондонского королевского общества (в этой должности он находил-

ся до самой смерти). В 1705 г. Ньютон был возведен в рыцарское достоинство; он стал сэром.

В последующие годы Ньютон новых научных результатов почти не получал. Он был занят руководством Королевским обществом, изданием и переизданием своих трудов, выполнением различных поручений, требующих высокой научной квалификации.

Много энергии он затрачивал на дискуссии и приоритетные споры сначала с Р. Гуком (1635—1703) по поводу открытия закона всемирного тяготения, а впоследствии — с Лейбницем и его сторонниками в связи с созданием дифференциального и интегрального исчислений. Печальный факт: в споре о приоритете Ньютон и Лейбниц изменили первоначальные оценки заслуг друг друга; результат спора вылился в то, что англичане отказались пользоваться алгоритмом Лейбница, а многие математики континентальной Европы не признавали достижений Ньютона. Так продолжалось более 100 лет.

Последние годы жизни Ньютон посвятил решению интересовавших его теологических вопросов. Он признавал бога как создателя и правителя мира, но считал, что разум человека может познать божественные законы.

Все это объяснимо: каждый из ученых, как и все люди, — сын своего века, со всеми достижениями и заблуждениями. Отличие лишь в том, что ученый видит дальше, но и он не может полностью отрешиться от идеологических пут века. Коперник, Дж. Бруно, Галилей, Кеплер — все они творили в рамках теологии. Иное дело — творения их противоречили догме, взрывали церковные устои.

В деятельности Ньютона прослеживается четкая грань между наукой и религией. Известно высказывание Энгельса о том, что Ньютон оставил богу «первый толчок» и запретил вмешиваться в его солнечную систему.

Скончался Ньютон 31 марта 1727 г. на 85-м году жизни. Похоронен он в Вестминстерском аббатстве. Эпитафия на его памятнике заканчивается словами: «Пусть радуются смертные, что существовало такое украшение рода человеческого».

Ньютон был скромным человеком. Незадолго до смерти он говорил: «Не знаю, чем я представляюсь миру, но сам себе я кажусь мальчиком, играющим на

морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени он находит более блестящий камешек или более красивую ракушку, чем обыкновенно, между тем как весь великий океан истины лежит передо мной неисследованным»¹.

Принято считать, что Ньютон придерживался суждения об интегрировании как действии, обратном дифференцированию, что вело к понятию неопределенного интеграла — совокупности первообразных; определенный интеграл получался как разность значений первообразной; Лейбниц же ввел интеграл с помощью величин, названных впоследствии интегральными суммами. Это верно, но не совсем.

В одной из лемм первой книги «Начал» Ньютона речь идет о построении вписанных (и описанных) в криволинейную трапецию, ограниченную непрерывной произвольной кривой, ступенчатых фигур и доказывается, что при бесконечном числе делений интервала, на котором задается кривая, площади вписанной и описанной фигур будут одинаковы и совпадут с площадью криволинейной трапеции. Важно заметить, что Ньютон допускал не только интервалы одинаковой длины, но и различной. А это означает, что оперировал он с такими же суммами, которые впоследствии вошли в анализ под названием сумм Дарбу (1842—1917).

Мало того, в первой же книге «Начал» Ньютон изучал притяжение внутренней и внешней точек сферическим слоем и сферой, а также взаимное притяжение двух сфер. И в этом случае он разбивал фигуры на элементарные и строил интегральные суммы, что приводило к вычислениям, аналогичным вычислению введенных позднее поверхностных и тройных интегралов.

Точно так же обстояло дело и с построениями Лейбница. Наряду с его взглядом на интеграл как результат суммирования у него неоднократно встречаются высказывания, свидетельствующие о том, что он считал интегрирование действием, обратным дифференцированию. Да ведь и формула, впервые появившаяся в 1798 г. в трактате С.-Ф. Лакруа по дифференциальному и интегральному исчислению и называемая теперь формулой Ньютона — Лейбница, несет в себе полную информацию по этому вопросу.

Основные идеи анализа сложились у Ньютона в чумные годы. Зимой 1664/65 г. он открыл носящее его имя

разложение степени бинома; в 1666 г. подготовил рукопись «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения», где изложил найденные к этому времени результаты по математике. Сочинение осталось в рукописи и было опубликовано лишь через 300 лет.

В 1669 г. Ньютон передал Барроу другое свое сочинение — «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», в котором содержались его открытия в учении о бесконечно малых, рядах, в приложении рядов к решению алгебраических уравнений. Барроу отправил сочинение Коллинсу (1625—1683) в Лондон, благодаря чему оно получило некоторую известность.

В 1670—1671 гг. Ньютон стал готовить более полную работу — «Метод флюксий и бесконечных рядов»². Издать ее не удалось. В «Метод флюксий» учение Ньютона выступало как система: рассмотрены исчисление флюксий (производных), приложение их к определению касательных, нахождению экстремумов, кривизны, вычисление квадратур, решение уравнений с флюксиями, что соответствует современным дифференциальным уравнениям.

Раньше всех из трудов Ньютона по анализу издано «Рассуждение о квадратуре кривых» (в 1704 г.). «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» вышел в 1711 г., а «Метод флюксий» — в 1736 г., после смерти автора. Столь поздняя публикация открытий, безусловно, не способствовала ознакомлению с ними, особенно за пределами Англии. Однако математики узнавали о них по рукописям, а также из переписки.

В 1676 г. Ньютон отправил два письма секретарю Королевского общества Г. Ольденбургу для передачи Лейбницу. В письмах не сообщалось о принципе и применениях метода флюксий, а отмечались важные результаты и ход рассуждений, с помощью которого Ньютон пришел, например, к разложению степени бинома. О методе же Ньютон сообщал анаграммами, как это было принято в то время для сохранения тайны, состоящими из расположенных в порядке алфавита букв трех фраз, написанных по-латыни. «По данному уравнению, содержащему сколько-либо флюент, найти флюксии и обратно» [29, с. 262]. «Один метод состоит в нахождении флюенты из уравнения, содер-

жащего вместе с ней и ее флюксию. Другой же заключается в употреблении вместо какой-либо неизвестной величины ряда, из которого можно удобно вывести остальные, и в сопоставлении однородных членов результирующего уравнения для определения членов взятого ряда» [29, с. 259].

После выхода в свет статей Лейбница по дифференциальному и интегральному исчислениям Ньютон дал изложение своего метода в двух письмах Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., который поместил выдержки из них в издании «Алгебры»; здесь же расшифрованы и анаграммы.

Математика для Ньютона не выступала как абстрактный продукт человеческого ума. Он считал, что геометрические образы — линии, поверхности, тела получаются в результате движения: линия — при движении точки, поверхность — при движении линии, тело — при движении поверхности. Эти движения осуществляются во времени, и за сколь угодно малое время точка, например, пройдет сколь угодно малый путь. Для нахождения мгновенной скорости необходимо найти предел отношения приращения пути, по современной терминологии, к приращению времени, т. е. взять «последнее отношение», когда приращение времени стремится к нулю. Так Ньютон ввел отыскание флюксий — производных.

Пользование теоремой о взаимной обратности операций дифференцирования и интегрирования и знание производных многих функций дали Ньютону возможность по флюксиям получать флюенты (функции), т. е. интегрировать. Если интегралы непосредственно не вычислялись, Ньютон разлагал подынтегральную функцию в степенной ряд и интегрировал его почленно. Введение такого приема — заслуга Ньютона. Для разложения функций в ряды он чаще всего пользовался открытым им разложением степени бинома, делением числителя на знаменатель, извлечением корня.

В «Методѣ флюксий» Ньютон поместил две таблицы неопределенных интегралов³; в одной из них содержатся интегралы, выражаемые алгебраически в конечном виде, в другой — интегралы, представимые через известные. В «Рассуждении о квадратуре кривых» Ньютон привел «Таблицу простейших кривых, сравнимых с гиперболой и эллипсом», где указал случаи интегралов, рациональных относительно x и $\sqrt{e + fx + gx^2}$

(или приводящихся к ним при $x = z^n$). Условия интегрируемости дифференциального бинома $x^m (a + bx^n)^p dx$ он сообщил Лейбницу в письме 24 октября 1676 г., указав, что $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ выражается алгебраически, когда $(m + 1)/n$, или $(m + 1)/n + p$, или p — целые положительные числа.

Спрямление кривых Ньютон осуществлял приведением к квадратурам. В «Анализе с помощью уравнений» он рассмотрел интеграл $\int \frac{\sqrt{1+ax^2} dx}{\sqrt{1-bx^2}}$, который, по его словам, «дает длину эллипса». Это — первый случай эллиптического интеграла. Для вычисления его Ньютон разложил числитель и знаменатель в ряды, разделил числитель на знаменатель и проинтегрировал образовавшийся ряд почленно. Это дало выражение эллиптического интеграла в виде ряда

$$\int \frac{\sqrt{1+ax^2} dx}{\sqrt{1-bx^2}} = x + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{6} \right) x^3 + \\ + \left(\frac{3b^2}{40} + \frac{ab}{20} - \frac{a^2}{40} \right) x^5 + \dots$$

Ньютон широко пользовался также приемом обращения рядов, т. е. получением из ряда для y по степеням x ряда для x по степеням y . С этой целью он применял методы неопределенных коэффициентов и последовательных приближений.

В «Анализе с помощью уравнений» Ньютон привел пример дуги $s = \arcsin x$. окружности $y^2 = 1 - x^2$ в виде интеграла $\int_0^x dx/\sqrt{1-x^2}$, который после разложения в ряд и почленного интегрирования дает $s = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$. Обращением ряда Ньютон определил

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots, \text{ а затем из}$$

формулы $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ нашел ряд

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$$

Обращая ряд

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots,$$

найденный при вычислении площади под гиперболой в виде интеграла $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$, Ньютон получил ряд

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots^4$$

Ко времени создания основного труда своей жизни — «Математических начал натуральной философии» — Ньютон свободно владел новым математическим аппаратом: дифференцированием, интегрированием, разложением в ряд, интегрированием дифференциальных уравнений, интерполированием.

При выводе формулы степени бинома Ньютон пользовался способом Декарта записи степеней с помощью показателей и распространением его на дробные и отрицательные показатели, а также интерполяционным приемом Валлиса, примененным при вычислении интеграла $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$. Биномиальный ряд Ньютона впервые опубликован в «Алгебре» Валлиса. Его Ньютон привел в письме Ольденбургу для Лейбница.

В «Анализе с помощью уравнений» высказаны три правила нахождения квадратур. Первое правило относится к квадратурам «простых» кривых: площадь под

кривой $y = ax^{m/n}$ (m и n — целые числа) будет $\frac{anx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$.

Когда $m/n > 0$, находится площадь от начала координат до точки (x, y) , т. е. интеграл $\int_0^x y dx$. Когда

$m/n < -1$, имеется в виду площадь, выражаемая интегралом $\int_x^\infty y dx$ (она получается отрицательной).

В случае $m/n = -1$ будет любая неограниченная площадь между гиперболой и асимптотой. Формула дает: $1/0 \cdot x^{0/1} = \infty$. Второе правило — «квадратура сложных кривых с помощью простых»: «Если выражение y складывается из многих членов этого рода, площадь тоже складывается из площадей, которые получаются от отдельных членов» [29, с. 4]. Третье правило относится к квадратурам всех остальных кривых; в этом случае выражение y или отдельных членов, входящих

в y , упрощается разложением в степенные ряды.

Правила распространяются и на трансцендентные кривые. Все они сопровождаются примерами. В качестве примеров с трансцендентными кривыми даны квадратуры циклоиды и квадратрисы. Ньютон заключил: «И я не знаю случаев такого рода, на которые не распространяется этот метод в его различных выражениях» [29, с. 21].

Характерны высказывания Ньютона общей значимости. Вот два из них: «Я не боюсь говорить о точечной единице или о бесконечно малой линии, так как еще при употреблении метода неделимых геометры имели в виду только отношения» [29, с. 17]. «Все, чего обычный анализ достигает (когда это возможно) при помощи уравнений с конечным числом членов, здесь всегда достигается при помощи бесконечных уравнений. И я не колеблюсь употреблять и здесь термин: *анализ*. Действительно, рассуждения в нем не менее достоверны, чем в первом, и уравнения не менее точны, хотя мы, люди конечного ума, и не в состоянии ни обозначить, ни воспринять все их члены так, чтобы точно узнать из них искомые величины» [29, с. 21].

Ньютон применял свои методы к вычислению площадей, к спрямлению кривых, кубатурам, вычислению координат центров тяжести и ясно представлял, что все эти операции осуществляются по одному общему принципу.

Необходимо отметить, что ни у Ньютона, ни у Лейбница не было формулы

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x),$$

называемой сейчас формулой Ньютона — Лейбница. Но это правило они знали. Ньютон писал: «...для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z , соответствующих частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади» [29, с. 121]. Здесь

$$z = \frac{ax^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}}, \quad \text{если } y = ax^{m/n}.$$

В «Методѣ флюксий и бесконечных рядов» основные

понятия и задачи анализа сформулированы на основе механической концепции, в механических терминах. Различные задачи анализа Ньютон свел к двум:

«I. Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорости движения в предложенное время.

II. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути» [29, с. 45].

Все величины Ньютон рассматривал в процессе роста и убывания и называл их флюентами, меняющимися с изменением «времени», причем под «временем» понималась любая величина, изменение которой выражает и измеряет время. Скорости изменения флюент — флюксии. Это — два центральных понятия анализа, в современной терминологии — взаимно обратные первообразная и производная. Сначала Ньютон не ставил вопроса о многозначности операции отыскания флюенты по флюксии, т. е. о том, что в результате интегрирования получится не $F(x)$, а $F(x) + C$. Об этом он указывал в «Рассуждении о квадратуре кривых», написанном позднее: «Всякую флюенту, полученную по первой флюксии, можно увеличить или уменьшить на любую постоянную величину» [29, с. 192].

На языке метода флюксий основные задачи анализа Ньютон сформулировал так:

1. «По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями» [29, с. 46].

2. «По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами» [29, с. 51].

Очевидно, первая из них — дифференцирование функции нескольких переменных, зависящих от «времени», вторая — интегрирование уравнения первого порядка.

Обе задачи Ньютон применил к нахождению экстремумов, центров кривизны и радиусов кривизны, проведению касательных, к квадратурам, кубатурам, спрямлению кривых.

Для приложения инфинитезимальных методов Ньютон разработал теорию пределов, содержащуюся в двенадцати леммах, изложенных в «Математических началах натуральной философии».

Оставим в стороне великие открытия Ньютона в оптике, механике, его систему мира, потому что они лежат вне интересов, затрагиваемых в этой книге,

и обратимся теперь к творчеству второго основателя анализа бесконечно малых — Лейбница, сыгравшего в становлении анализа, пожалуй, бóльшую роль, чем Ньютон.

2

По сравнению с Италией, Англией и Францией Германия тех лет в отношении математики выглядела глубокой провинцией: после Кеплера до Лейбница великих математиков не было. Готфрид Вильгельм Лейбниц, универсальный гений, философ, стоящий в одном ряду с Декартом, Спинозой, Кантом, Гегелем, математик, соперничавший в создании анализа с Ньютоном, политик, дипломат, публицист, оставил значительный след в механике и физике, занимался юриспруденцией, логикой, теологией, историей, выдвинул существенные идеи в геологии, языкознании и психологии, организовывал академии наук, внес вклад в горное, библиотечное и монетное дело. Изобретал различные устройства, в том числе создал счетную машину. Он много ездил и завязывал знакомства с выдающимися людьми, вел огромную переписку — насчитывается около 15 000 писем Лейбница. Его интересовали все ведущие идеи века.

Последние годы жизни Лейбница были тяжелыми. Ему, как когда-то Кеплеру, правители ганноверского двора, у которых он находился на службе, не выплачивали жалованья, спор о приоритете с англичанами получил широкую огласку и подорвал репутацию Лейбница, здоровье его пошатнулось.

Смерть Лейбница прошла почти незамеченной. На его похоронах присутствовало всего несколько друзей и единственный родственник — племянник. От ганноверского двора, которому Лейбниц верно служил 40 лет умом и талантом, не было никого. Из трех академий, Берлинской, Парижской и Лондонского королевского общества, членом которых состоял Лейбниц, лишь в Парижской было прочитано Б. Фонтенелем (1657—1757) «Похвальное слово Лейбницу» на следующий год после его смерти.

Лейбниц родился 1 июля 1646 г. в Лейпциге; его отец — профессор морали на философском факультете Лейпцигского университета — умер, когда мальчику пошел седьмой год. Готфрид рано пристрастился

к чтению книг из библиотеки отца и при беспорядочном чтении самостоятельно овладел латинским языком, перечитывая одни и те же сочинения древних авторов. В 1661 г. он поступил в университет родного города, изучал языки, философию, право, а в 1663 г. — математику в Йенском университете, где провел один семестр.

Вернувшись в Лейпциг, Лейбниц продолжил занятия правом, подготавливая себя к профессии юриста. В 1664 г. ему присудили степень магистра философии, в 1665 г. — бакалавра прав. В 1666 г. он в университетском городке Альтдорфе защитил диссертацию и получил степень доктора права, после чего уехал в Нюрнберг.

По рекомендации познакомившегося в Нюрнберге с Лейбницем дипломата Бойнебурга он отправился в Майнц и поступил на службу к майнцскому курфюрсту на должность советника по пересмотру свода законов для наведения порядка в запутанном законодательстве и судопроизводстве.

В 1672 г. Лейбниц приехал в Париж с дипломатическим поручением курфюрста и прожил там с перерывами четыре года. Здесь он встретился с Гюйгенсом — президентом Парижской академии наук. Лейбниц ознакомил Гюйгенса со своими первыми самостоятельными результатами по исследованию числовых рядов. Гюйгенс посоветовал ему изучить «Геометрический труд» Григория Сен Венсана и «Арифметику бесконечных» Валлиса. Так Лейбниц познакомился с развивающимся анализом бесконечно малых.

Лейбницу удалось завязать личные контакты и с некоторыми английскими математиками во время кратковременной поездки с дипломатической миссией в Лондон в начале 1673 г. Он с успехом доложил в Королевском обществе свою идею счетной машины. Однако в беседе с лондонскими математиками он обнаружил недостаточное знакомство с математической литературой. Лейбницу предложили найти сумму ряда обратных квадратов

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots,$$

чего выполнить ему не удалось⁵.

Несмотря на эти неудачи, общее впечатление о Лейбнице среди членов Королевского общества оста-

лось благоприятное, и он после отъезда из Лондона был избран в члены Королевского общества.

По возвращении в Париж Лейбниц опять встречался и беседовал с Гюйгенсом и принялся за изучение «Геометрии» Декарта, работ Кавальери, Паскаля, Гюйгенса, Дж. Грегори, Барроу. Уже тогда он получил некоторые результаты в новой для себя области, в том числе ряд, определяющий π :

$$\pi/4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

К осени 1675 г. Лейбниц вчерне построил символику дифференциального и интегрального исчисления, разработал основные принципы его. Упоминаемые письма Ньютона, посланные через Ольденбурга, давали Лейбницу информацию об открытиях Ньютона, но к этому времени основными идеями он уже владел сам. После того как он ввел, например, сумму бесконечно малых, он писал: «Чудно видеть, что входишь в новый род исчисления, отличный от Виетова, как небо от земли».

В Париже Лейбниц занимался не только математикой: выполнял полученные им дипломатические поручения, подробно ознакомился с жизнью Парижа и Франции, встречался и беседовал с главой янсенистов Арно, министром Кольбером, стоявшим во главе всей французской экономики, вел обширную переписку. При содействии Арно он получил доступ к рукописям Паскаля, хранящимся у родственников, и составил описание ненапечатанных работ Паскаля, впоследствии утраченных.

Еще в 1671 г. ганноверский герцог Иоганн Фридрих, прослышавший о блестящем даровании Лейбница, начал с ним переговоры, приглашая его к себе на службу. В середине 1676 г. Лейбниц принял предложение Иоганна Фридриха, но предварительно отправился в Лондон, где продемонстрировал членам Королевского общества свою действующую счетную машину, обсуждал с ними математические проблемы. Тогда же он побывал в Голландии, посетил Амстердам, Лейден, Гаагу, познакомился с математиком Я. Гудде (1628—1704), Б. Спинозой (1632—1677), с которыми несколько раз беседовал.

Официально Лейбниц считался хранителем библиотеки герцога и его советником по вопросам экономики, финансов, народного просвещения, внешних взаимоот-

ношений и т. д. В его обязанности входило составление истории дома Вельфов, ради чего он вынужден был тратить много времени на работу в архивах, библиотеках, выезжать для сбора необходимых материалов в Южную Германию, Австрию, Италию (1687--1690 гг.).

В Ганновере Лейбниц интенсивно занимался самыми различными вопросами: выполнял поручения герцога, писал философские труды, продолжал исследования, посвященные анализу бесконечно малых, занимался лингвистикой, совершенствованием горного дела, вел обширную переписку.

В 1699 г. Парижская академия наук получила право избирать в свой состав не католиков; Лейбниц стал ее иностранным членом. Он несколько раз встречался и беседовал с Петром I и способствовал организации образования в России и открытия Петербургской академии наук. В 1700 г. Лейбниц организовал Берлинскую академию наук и стал первым ее президентом.

Кроме философских и математических сочинений, у Лейбница есть работы, относящиеся к истории, праву, политике, языкознанию, палеонтологии, механике, физике и пр.

Лейбниц ратовал за примирение религии и науки, веры и разума, откровения и философии. Математика для него составляла часть философской системы с ее фундаментом — всеобщей гармонией. Мир, в котором царит всеобщая гармония, един, его можно понять единым методом познания типа математического метода. Необходимо построить, считал Лейбниц, алгоритм, где бы операции над понятиями выполнялись так же, как в математике операции над величинами.

Для Лейбница характерна практическая направленность его деятельности: все создаваемое им должно было найти практическое приложение. Так оно фактически и происходило.

Лейбниц обладал огромной трудоспособностью, мог работать много и упорно. Он называл себя «наиболее учащимся из смертных». Свои успехи он объяснял так: «Две вещи оказали мне чрезвычайную услугу (хотя, вообще говоря, они обоюдоостры и для многих вредны): во-первых, то, что я был самоучкой, а во-вторых, то, что в каждой науке, едва приступив к ней и часто не вполне понимая общеизвестное, я искал нового».

Умер Лейбниц 14 ноября 1716 г. На могильной плите его высечены два слова — «Прах Лейбница».

В отличие от Ньютона, прослушавшего курс математики у Барроу и систематически пополнявшего свои знания самостоятельно во время учебы в Кембриджском университете, Лейбниц в математике был самоучкой. Вот что он писал Я. Бернулли в 1703 г.: «Когда я приехал в 1672 г. в Париж, я был математиком-самоучкой, но опыт мой был невелик, мне не хватало терпения пройти цепь доказательств. Ребенком я изучал элементарную алгебру некоего Ланга, затем алгебру Клавия; что касается Декарта, он мне показался слишком трудным. Мне казалось, что во мне укрепилась достаточно опрометчивая уверенность в себе...

В этом высокомерном математическом невежестве я уделял внимание только истории и праву, видел в их изучении свою цель. Однако математика была для меня более приятным развлечением. Особенно я любил знакомиться с машинами и придумывать их. Именно в то время я открыл свою арифметическую машину»⁶.

Знакомство с Гюйгенсом сыграло важную роль в становлении Лейбница-математика, вошедшего в геометрию, по его словам, «с черного хода». Дальше в том же письме было: «Вот тогда Гюйгенс, который, как я предполагаю, считал меня более способным, чем я был на самом деле, дал мне экземпляр только что изданного «Маятника»⁷. Для меня это было началом или поводом для более глубоких математических занятий».

Лейбниц обратился к одной из работ Паскаля. «Но каково было мое удивление, когда я убедился, что словно по велению судьбы глаза Паскаля были закрыты: ибо я тотчас же увидел, что эта теорема приложима вообще ко всем кривым, даже если бы перпендикуляры и не встречались в одном центре... Я тотчас же пошел к Гюйгенсу, которого с тех пор не видел, и сказал ему, что, следуя его советам, я уже узнал кое-что такое, что Паскалю было неизвестно, и изложил ему мою общую теорему о движении кривых. Он был весьма удивлен и сказал мне, что это в точности та теорема, на которой построены его построения для того, чтобы найти поверхности параболических, эллиптических и гиперболических тел вращения».

Так возник один из источников открытия Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления — метод характеристического треугольника. Суть дела в следующем. Паскаль определял статический момент (в современной терминологии и символике) относитель-

но оси Ox четверти круга радиуса a (рис. 18), т. е.

$$\int_0^a y ds.$$

Он заменил элемент дуги отрезком касательной, провел радиус окружности BA в точку касания A и воспользовался подобием треугольников BAC и bAc ; это дало

$$\Delta s : a = \Delta x : y, \quad y \cdot \Delta s = a \cdot \Delta x.$$

После замены $y \cdot \Delta s$ в интегральной сумме и перехода к пределу он получил результат:

$$\int_0^a y ds = \int_0^a a \cdot \Delta x = a^2.$$

Лейбниц обобщил прием Паскаля на любые кривые: необходимо из точки A провести нормаль к кривой до пересечения с осью Ox , если бы перпендикуляры даже не встречались в одном центре. Образованный нормалью, поднормалью и ординатой треугольник будет подобен «характеристическому треугольнику» из сколь угодно малых отрезков Δx , Δy и Δs .

«Поощренный этим успехом и тем, какое множество предметов возникло передо мною, я в том же году заполнил несколько сот страниц, разделив свой труд на две части, об определенных и неопределенных... Вскоре после того в мои руки попала «Всеобщая геометрия» шотландца Грегори. Я увидел в ней то же самое искусство (хотя затемненное доказательствами на античный лад), и по тому же пути шел Барроу в своих «Лекциях», где я увидел набросок большей части моих теорем. Это меня мало огорчило, ибо я понимал, что даже новичок, раз он усвоил такие понятия, может сделать это играючи. И затем я хорошо понимал, что есть еще более высокие предметы, но чтобы в них разобраться, нужен новый метод исчисления. Вот тогда я получил мою арифметическую квадратуру и другие подобные вещи, которые были встречены французами и англичанами с энтузиазмом, но я не считал этот труд достойным быть изданным. Ибо мне наскучило заниматься мелочами, когда передо мной открылся Океан».

Здесь определяемые — величины, связанные с задачами интегрирования: площади, объемы, длины, моменты различных фигур относительно оси. Лейбниц

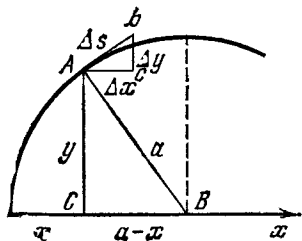


Рис. 18

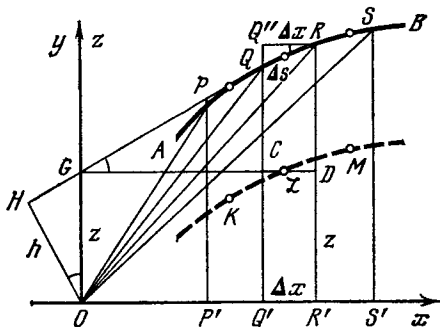


Рис. 19

указал на источники таких задач — работы Кавальери, Гульдина, Торричелли, Григория Сен Венса, Паскаля. Неопределимыми он назвал бесконечно малые, дифференциальные величины. С помощью характеристического треугольника Лейбницу удалось установить много известных ранее и новых фактов и теорем. И все это произошло в первый год его «математического ученичества».

Впоследствии он достиг больших результатов, которые старыми методами не могли быть получены.

Обратимся к примеру Лейбница, относящемуся к 1673 г. и содержащему интегрирование, разложение в ряд и метод характеристического треугольника. Это — «теорема трансмутации», представляющая собой преобразование интеграла с помощью перехода от декартовых координат к полярным. Пусть имеется гладкая дуга AB (рис. 19). Разобьем ее радиус-векторами на частичные дуги Δs и сектор $OABO$ на малые секторы. Из точек разбиения дуги опустим перпендикуляры на ось абсцисс. На каждой частичной дуге выполним одинаковые по конструкции построения, например, на дуге QR : в произвольной точке ее проведем касательную к кривой; она пересечет вертикальную ось в точке G ; на продолжение касательной опустим из точки O перпендикуляр OH ; через точку G проведем прямую, параллельную оси Ox . Построим также «треугольник» со сторонами Δx , Δy и Δs и прямоугольник $Q'CDR'$. Обозначим $OH = h$, $OG = z$. Треугольники OHG и $QQ''R$ подобны, поэтому

$$\Delta x \cdot z = h \cdot \Delta s.$$

Это означает, что с точностью до величин высшего

порядка малости площадь прямоугольника $Q'CDR'$ в два раза больше площади треугольника OQR .

Получилось так, что точке на кривой AB , через которую проведена касательная, будет соответствовать точка L на прямой, проходящей через точку G и параллельной оси Ox . При этом площадь определенного прямоугольника будет вдвое больше площади соответствующего криволинейного сектора. Если теперь провести такие построения для всех частичных дуг Δs

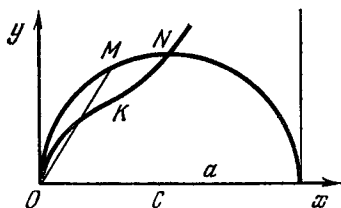


Рис. 20

и перейти к пределу, то получим кривую KLM , обладающую тем свойством, что площадь сектора $OABO$, составленного из бесконечно малых треугольников, будет вдвое меньше суммы площадей малых прямоугольников, составляющих площадь «под кривой» KLM .

В XVII в. кривые такого вида, как KLM , назывались квадратисами. В общем виде задача формулиро-

валась так; для квадратуры $\int_a^b f(x) dx$ необходимо подобрать функцию $z = F(x)$, чтобы было (с точностью до некоторого множителя) $\int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Если уравнение кривой $y = f(x)$, то уравнение квадратисы $z(x) = f(x) - xf'(x)$ ⁸.

Лейбниц применил этот прием к циклоиде и окружности; в последнем случае он определил «арифметическую квадратуру круга». Вот его рассуждения (в современных терминах). На рис. 20 изображена окружность, уравнение которой $y^2 = 2ax - x^2$. Найдем уравнение ее квадратисы:

$$2yy' = 2a - 2x, \quad y' = (a - x)/y, \quad z = y - xy',$$

$$z = y - x(a - x)/y, \quad z = (y^2 - ax + x^2)/y,$$

$$z = (2ax - x^2 - ax + x^2)/y, \quad z = ax/y.$$

Далее: $\frac{z}{a} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}, \quad \frac{z}{a} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}},$
 $x = 2az^2/(a^2 + z^2),$

Квадратиса $ОКМ$ представляет собой кривую, называемую версиерой, или локоном Марии Анъези ⁹. Она имеет ось симметрии $x = 0$ и асимптоту $x = 2a$.

Площадь кругового сегмента с основанием $ОМ$, где $М (x, y)$ — произвольная точка окружности, будет

$\frac{1}{2} \int_0^x z dx$, а площадь соответствующего кругового сектора

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(ay + \int_0^x z dx \right) = \frac{1}{2} \left[z(2a - x) + xz - \int_0^z x dz \right] = \\ = az - \int_0^z \frac{az^2 dz}{a^2 + z^2}.$$

Преобразование интеграла, аналогичное интегрированию по частям, математикам XVII в. было известно. Таким приемом пользовались, например, Ферма, Паскаль. Для вычисления площади кругового сектора Лейбниц разложил подынтегральную функцию в ряд и проинтегрировал его почленно. Это дало

$$\sigma = az - z^3/3a + z^5/5a^3 - z^7/7a^5 + \dots$$

При $a = 1$

$$\sigma = z - z^3/3 + z^5/5 - z^7/7 + \dots$$

Обозначим центральный угол сектора через 2φ ; в случае $a = 1$ площадь сектора будет φ и $\operatorname{tg} \varphi = x/y = z$. Следовательно, Лейбниц получил разложение в ряд $\varphi = \operatorname{arctg} z = z - z^3/3 + z^5/5 - \dots$. Результат был известен Грегори и Ньютону, но Лейбниц об этом не знал. При $z = 1$ Лейбниц нашел уже упоминаемое выражение

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots,$$

которое и назвал «арифметической квадратурой круга» ¹⁰

Лейбниц сообщил о своем открытии Гюйгенсу и Ньютону (письмом 27 августа 1776 г. через Ольденбурга). Гюйгенс 6 ноября 1676 г. писал Лейбницу: «Я отсылаю вам, сударь, вашу статью об арифметической квадратуре, которую я считаю очень красивой и очень удачной. На мой взгляд, это немало — открыть в задаче, которой занимались столько умов, новый путь,

который как будто внушает некоторую надежду найти и настоящее решение. Ибо поскольку круг, согласно вашему открытию, относится к описанному около него квадрату, как бесконечный ряд дробей $1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11$ и т. д. относится к единице, то представляется возможным указать сумму такой прогрессии и, следовательно, квадратуру круга... Но если бы даже оказалось невозможным преодолеть трудности..., за вами останется то, что вы нашли весьма замечательное свойство круга, и это всегда будет предметом прославления у геометров. Что касается анонимной кривой, которая использована в вашем доказательстве, я хотел бы ее окрестить... Но я затем увидел, что эта же линия была раньше обнаружена Грегори, и полагаю, что надо за ним оставить право назвать ее так, как он пожелает»¹¹.

По поводу ряда для арктангенса Лейбниц заметил, что значение z в нем не должно превышать единицы. Тогда он уже знал теорему о сходимости знакопеременного ряда, носящую его имя, хотя термина «сходимость» и не употреблял.

О квадратуре циклоиды Лейбниц сообщил в заметке, помещенной в парижском «Журнале ученых» за 1678 г. И все это была проба сил.

Представляет интерес разработка Лейбницем символики дифференциального и интегрального исчислений. Ее можно проследить по рукописям. Так, 26 октября 1675 г. Лейбниц выражал квадратуру в духе Наскаля словами *omn. w* (все ординаты); 29 октября заметил, что удобнее писать вместо *omn. l* выражение $\int l$ (сумма линий, знак \int происходит от первой буквы слова *summa*), и указал, что здесь возникает новый род исчисления. Другой род исчисления появляется, по словам Лейбница, когда из выражения $\int l = a$ следует $l = ya/d$. Знак \int увеличивал число измерений, а d — уменьшал (d — первая буква слова *differentia* — разность). Уже в рукописи 11 ноября символы x/d и y/d заменены на dx и dy .

Интеграл Лейбниц понимал как сумму бесконечного числа слагаемых — определенный интеграл. В одной из рукописей есть запись $d \int x = x$. Это означает, что взаимная обратность действий дифференцирования и интегрирования у Лейбница выступали на оперативном уровне. Лейбниц вместо слова «интеграл»

употреблял «сумма»; термин «интеграл» ввел И. Бернулли.

Осенью 1675 г. Лейбниц сформулировал основные понятия дифференциального и интегрального исчисления. Он дал общие правила решения задач на квадратуры и касательные, установил связь между задачами дифференцирования и интегрирования, ввел символику обеих операций, сохранившуюся поныне. Созданные Лейбницем исчисления, вскоре объединенные общим названием анализа бесконечно малых, давали возможность более просто решать рассматриваемые ранее задачи, а также получать новые результаты.

Решение задач анализа бесконечно малых привело Лейбница к расширению и уточнению важнейшего понятия математики — функции. Слово «функция» и введено в науку Лейбницем как понятие, объединяющее многие отдельные и разобщенные виды функциональных зависимостей, изучаемых ранее.

Лейбниц также устранил один недостаток предшествующей математики, обусловленный своего рода догматичностью Декарта, считавшего, что математика должна заниматься изучением только алгебраических зависимостей. Он назвал механическими кривые, которые не могут быть описаны уравнениями в алгебраической форме (например, графики тригонометрических функций), считал их негеометрическими и утверждал, что они не должны быть предметом чистой математики. С открытием анализа бесконечно малых ограничение математики алгебраическими функциями потеряло смысл. Потеряла смысл и введенная Декартом терминология. Лейбниц заменил термин «механический» на «трансцендентный», что сохранилось до сих пор.

В своем первом письме Ньютону (1676 г.) Лейбниц поставил перед ним вопросы обоснования биномиальной формулы, а также другие в связи с приемом разложения функций в ряд и обращения рядов. Он сообщил найденные им ряды для e^x , $\arctg x$, ряд для вычисления π .

Второе письмо Лейбница Ньютону (1677 г.) содержало полное разъяснение установленных им правил дифференцирования и применения их. Здесь же Лейбниц изложил решение проблемы проведения касательной с помощью нового исчисления и отметил возможность квадратуры любой фигуры, которая приводится к «дифференциальному уравнению». Это означает, что

кривая $x = f(y)$ будет квадратируемой, когда найдется функция $x = F(y)$, для которой будет

$$dx = dF(y) = f(y) dy.$$

К сожалению, на этом содержательная переписка двух великих математиков оборвалась.

Статья Лейбница с изложением его открытия появилась в 1684 г., после того как Э. Чирнгауз (1651—1708), которого Лейбниц все время информировал о своих открытиях, напечатал в 1683 г. работу о квадратурах алгебраических кривых, даже не упомянув Лейбница, идеями которого воспользовался.

В истории математики отмечаются две важнейшие даты развития математики в XVII в. Первая связана с выходом в свет «Геометрии» Декарта (1637 г.), вторая — с опубликованием основополагающей работы Лейбница.

Полное название мемуара Лейбница таково: «Новый метод максимумов и минимумов, для которого не служат препятствиями ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Он характеризуется крайне сжатым изложением: на семи страницах даны основные понятия, приемы дифференцирования, отыскания экстремумов, точек перегиба и т. д. И. Бернулли говорил, что это «скорее загадка, чем разъяснение».

В «Новом методе» Лейбниц ничего не сообщил о своих результатах в интегральном исчислении. В конце статьи он указал, что дал «лишь начала некоей более высокой геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной математики», и добавил, что решением задачи французского математика Ф. Дебона (1601—1652) будет логарифмическая кривая.

Задача Дебона имеет принципиальное значение, поэтому следует ее обсудить. Она относится к классу обратных задач на касательные и сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. В свое время Дебон предложил ее Декарту. Декарт высказал сомнение в существовании общего метода решения таких задач и построил приближенное решение. Лейбниц в письме Ньютону от 27 августа 1676 г. сообщил, что он ее решил.

Задачу Дебона можно сформулировать так: найти линию AB , обладающую тем свойством, что если Mc

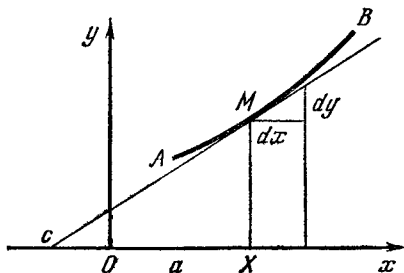


Рис. 21

есть проведенная касательная, то Xc всегда будет равняться постоянному отрезку a .

Вот решение ее. Из чертежа (рис. 21) можно записать

$$MX/a = dy/dx.$$

Разделим переменные в этом уравнении и решим его:

$$dy/y = dx/a, \quad \ln |y| = x/a + \ln C,$$

$$\ln (|y|/C) = x/a, \quad y/C = e^{x/a}, \quad y = Ce^{x/a}.$$

Получено общее решение уравнения.

Лейбниц рассуждал так. Считая значение dx постоянным, $dx = b$, он записал $y = ady/b$. Поскольку значения y пропорциональны dy , они образуют геометрическую прогрессию, когда x — арифметическую; это означает, что x — логарифм y , т. е. AB — логарифмическая кривая.

В публикации 1686 г. Лейбниц ввел знак интеграла, отметив взаимную обратность операторов \int и d . В одной задаче он получил выражение $\int x dx$ и записал $\int x dx = \frac{x^2}{2}$, поскольку $d(x^2/2) = x dx$; он пояснил: «...у нас суммы и разности или \int и d взаимно обратны, как степени и корни в обычном исчислении».

Здесь же Лейбниц употребил термин «характеристический треугольник» со сторонами dx , dy , ds и выражения «анализ бесконечных», «исчисление бесконечно малых», указал, что методы нового исчисления распространяются и на трансцендентные величины, появляющиеся при интегрировании и решении обратных задач на касательные.

В работе 1693 г. Лейбниц показал, что общая задача квадратуры сводится к отысканию линии, обладающей определенным «законом наклона», что означало

$\int_0^x f(x) dx = F(x)$, когда $dF(x)/dx = f(x)$ в предположении, что $F(0) = 0$.

В этом утверждении заключены важные факты: связь между интегралом и производной, т. е. тангенсом угла, который образует касательная к кривой с осью Ox , а также формула для вычисления определенного интеграла в виде разности значений первообразной.

В 1694 г. Лейбниц ввел аддитивную произвольную постоянную при вычислении неопределенного интеграла и указал, что получается бесчисленное множество кривых, из которых можно выбрать проходящую через данную точку. Это означает на современном языке нахождение частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Две работы (1701 и 1703 гг.) Лейбниц посвятил интегрированию рациональных дробей. Для интегрирования рациональной дроби он выделял из нее целую часть, после чего правильную рациональную дробь представлял в виде суммы простейших. В связи с интегрированием рациональных дробей в анализ вошли комплексные числа и возник спор о логарифмах отрицательных чисел.

Лейбниц при интегрированиях основывался на тождествах вида

$$\begin{aligned} a/(x+l)(x+m) &= a/(m-l)(x+l) + \\ &+ a/(l-m)(x+m), \quad a/(x+l)(x+m)(x+n) = \\ &= a/(m-l)(n-l)(x+l) + \\ &+ a/(l-m)(n-m)(x+m) + \\ &+ a/(l-m)(l-n)(x+n) \end{aligned}$$

и других, аналогичных этим, содержащих x в числителе дроби. Он поставил вопрос о представимости многочлена в виде произведения множителей первой и второй степеней. Положительное решение этого вопроса означало бы, что интегралы от рациональных функций выражались бы через рациональные функции, логарифмы (квадратуры гиперболы) и обратные круговые функции (квадратуры круга).

В своих рассуждениях Лейбниц допустил ошибку, считая, что интегралы $\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$, $\int \frac{dx}{x^8 + a^8}$ и подобные им должны давать новые трансцендентные функции. Это соответствовало его философским воззрениям.

Если бы они, как интегралы $\int \frac{dx}{x+a}$ и $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

сводились к квадратуре гиперболы и квадратуре круга, то все было бы единообразно. «Но природа, мать вечного разнообразия, или, лучше сказать, божественный дух слишком цепко оберегает свою прекрасную многоликость, чтобы допустить слияние всего в одну породу. И таким образом он находит изящный и удивительный выход в этом чуде анализа, этом побочном порождении мира идей, двойственном существе как бы между бытием и небытием, что мы называем мнимым корнем. И поскольку всякий раз, когда знаменатель рациональной дроби имеет мнимые корни, что может получиться бесконечно многими способами, будет мнимой и гипербола, квадратура которой нам пужна, и ее никоим образом нельзя будет построить»¹².

Ошибка Лейбница объясняется просто: он не заметил разложения двучлена $x^4 + a^4$ на множители: $x^4 + a^4 = (x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)(x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)$ и заявлял, что утверждение о возможности разложения многочлена с действительными коэффициентами на множители первой и второй степени неверно. «Я нашел, — писал Лейбниц, — что тот, кто утверждал бы это, ограничивал бы без оснований многообразие природы». В подтверждение этого он привел разложение:

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= (x^2 + a^2\sqrt{-1})(x^2 - a^2\sqrt{-1}) = \\ &= (x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}) \times \\ &\times (x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}). \end{aligned}$$

И даже когда И. Бернулли в 1704 г. опубликовал мемуар об интегрировании рациональных дробей, в котором, по словам М. В. Остроградского (1801—1862), изложил способ, вошедший «с некоторыми упрощениями и изменениями во все курсы интегрального исчисления», Лейбниц, опираясь на приведенный пример, утверждал, что «имеется неограниченный ряд разновидностей трансцендентных квадратур, одна выше другой, не зависящих друг от друга, и что квадратура гиперболы и квадратура круга являются лишь первыми и простейшими их примерами». Лейбниц тем самым не способствовал установлению того факта, что рациональные функции интегрируются в конечном виде.

Лейбниц успешно применял свое исчисление, участвуя в конкурсах по решению трудных задач, например

задачи Галилея о цепной линии и задачи И. Бернулли о брахистохроне. Большое внимание он уделял проблеме обоснования анализа бесконечно малых, что частично вызывалось критикой его методов.

Так завершилось величайшее открытие в математике, но и не только в математике, а во всем научном естествознании, — создание алгоритма анализа бесконечно малых. Вслед затем перед математиками возникли новые проблемы. А. Пуанкаре (1854—1912) отмечал три из них: «решение алгебраических уравнений; интегрирование алгебраических функций; интегрирование дифференциальных уравнений»¹³.

Открытие Ньютона и Лейбница совершило переворот в математике. Если раньше она была доступна лишь узкому кругу специалистов, решающих каждую отдельную задачу придуманными ими методами, то после создания алгоритма дифференциального и интегрального исчисления, применимого к широкому кругу задач, математика стала инструментом в руках людей, занимающихся различными исследованиями, но не обладающих достаточно глубокими математическими данными.

Произошла в некотором смысле демократизация математики, возросло ее общекультурное значение. В то же время прослеживается обратная связь: возрастающее число исследований необходимо приводило к возникновению новых проблем, встающих перед самой математикой и стимулирующих ее развитие.

3

После знаменательного времени Ньютона и Лейбница развитие идеи интеграла пошло в двух направлениях: интеграл, трактуемый как предел некоторой суммы, определенный интеграл, приобретал совершенные и всеобъемлющие формы, находил все большее и большее применение при решении задач самой математики, в которой он сложился, механики, физики, проник в технические науки и стал инструментом, необходимым во всех отраслях естественных наук; интеграл как семейство первообразных, неопределенный интеграл, своим развитием вызвал возникновение совершенно нового раздела анализа — методов интегрирования функций, а это в свою очередь было сопряжено с появлением функций, не известных ранее, —

класс интегрируемых функций все время пополнялся; важнейшее же приложение неопределенного интеграла относится к интегрированию дифференциальных уравнений, составляющих мощный аппарат многих наук.

Хотя в письме Гюйгенсу в сентябре 1691 г. Лейбниц высказал несбыточное пожелание завершить еще в XVII в. развитие анализа, «чтобы отныне вся проникательность человеческого разума обратилась к физике», он понимал, что, так же как в алгебре обратные операции требовали расширения числовой области (введения дробных, отрицательных, иррациональных, мнимых чисел), интегрирование должно приводить к новым функциям. Он в 1710 г. писал: «Подобно тому как невозможность произвести требуемое извлечение корня в рациональных числах порождает иррациональные величины, так невозможность произвести требуемое интегрирование... в алгебраических величинах порождает трансцендентные величины, изучение которых мы уже ввели в анализ»¹⁴.

Отметим некоторые важные особенности развития математики в период, непосредственно следующий после Ньютона и Лейбница. К ним относится все большее проникновение в анализ алгебры, что, в частности, расширяло геометрические интегрирования. Стимулировало математику совершенствующееся понятие функции. Складывались благоприятные для развития науки общественные условия, в результате чего наукой стало заниматься большее число людей, налаживалось издание не только книг, но и научной периодики. Выдвинутые Ньютоном и Лейбницем идеи ждали детальной разработки. «Найдутся люди,— писал Лейбниц,— которые разнесут дальше семена нового учения и соберут более богатую жатву...».

История распорядилась так, что ближайшими помощниками Лейбница в развитии анализа и других направлений математики стали братья Якоб и Иоганн Бернулли.

Род Бернулли — выдающееся явление в истории науки и культуры. Он дал девять крупных математиков, из них трех великих (Якоб, Иоганн, Даниил). Помимо математиков, среди Бернулли были историки, архитекторы, юристы, искусствоведы и т. д. Не менее 30 представителей Бернулли обладали талантами в различных областях деятельности.

Кафедру математики Базельского университета

Бернулли возглавляли 105 лет практически без перерыва. Профессорами того же университета (на разных кафедрах) Бернулли состояли более 200 лет. Кресло академика Парижской академии наук было занято ими подряд 100 лет. Та же академия выдала десятки премий членам этой семьи за лучшие конкурсные работы. Пятеро математиков Бернулли были академиками Петербургской академии наук, трое работали в Петербурге.

Ветвь математиков Бернулли начинается с Якоба. Якоб Бернулли родился 27 декабря 1654 г. (ст. ст.) в Базеле, куда семья Бернулли переехала из Франкфурта-на-Майне, эмигрировав, в свою очередь, во Франкфурт из Амстердама вследствие гонений на протестантов.

Якоб Бернулли окончил Базельский университет, где изучал философию, богословие и языки, готовился к тому, чтобы стать богословом. Он владел французским, немецким, английским, итальянским, латинским и греческим языками. Рано увлекся математикой и изучал ее самостоятельно. В 1671 г. получил степень магистра. С большим успехом читал проповеди на немецком и французском языках. В то же время продолжал пополнять свои знания по математике.

В Швейцарии того времени занятие математикой не обещало никаких выгод, так как соответствующих должностей было мало и даже университетские преподаватели математики оплачивались крайне скудно. Впоследствии И. Бернулли, в связи с поездкой сыновей Даниила и Николая в Петербург, напишет: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз обижают и презирают».

Несмотря на неблагоприятную перспективу, Якоб решил посвятить себя целиком математике. На восемнадцатом году он успешно разрешил довольно трудную хронологическую задачу об определении года юлианского календаря по данным солнечного периода и индиктиона¹⁵. В эти годы он преимущественно занимался астрономией.

20 августа 1676 г. Якоб отправился в длительное путешествие по Швейцарии, Франции, Италии, из которого возвратился в Базель лишь 20 мая 1680 г. Во время путешествия он совершенствовался в знании

языков, изучал нравы народов, был домашним учителем. По возвращении в Базель Якоб опубликовал первую научную работу, посвященную кометам. Здесь он высказался против общепринятого мнения, согласно которому комета — пекий «воздушный феномен», и утверждал, что кометы — небесные тела с определенными траекториями движения.

Статья вызвала критику богословов. По официальной версии, кометы представляли собой знаки божьего гнева. Низводить их до положения небесного тела, подчиненного неизбежным законам, значило идти наперекор божественным установлениям. Бернулли вышел из затруднения следующим образом. Действительно, кометы движутся по определенным траекториям, но траектории расположены так и законы их движения таковы, что кометы являются жителям Земли как раз тогда, когда господу угодно проявить свое неудовольствие. Во втором издании статьи Якоб дал иное объяснение: о согласовании движения кометы с периодами господнего гнева не говорилось ничего; ядро кометы рассматривалось как обычное небесное тело, но хвост — это, действительно, знак того, что господь гневается. Размер хвоста находится в согласии с силой гнева. Так Бернулли согласовал свой научный взгляд с богословской догмой.

В 1682 г. Якоб отправился в новое путешествие, на этот раз по Нидерландам и Англии. Он завязал научные знакомства — с Гюйгенсом в Амстердаме, астрономом Флаамстидом в Гринвиче и др. В октябре 1682 г. он возвратился в Базель и больше не выезжал никуда, кроме как для лечения на курорты.

Между тем он все больше совершенствовался в математике, и успехи его стали известными. В октябре 1686 г. оказалась вакантной должность математика в университете. Сенат университета единодушно выдвинул на вакантное место Якоба Бернулли. Вступление в должность состоялось 15 февраля 1687 г. Вряд ли присутствующие на этом скромном акте представляли, что они являются свидетелями беспримерного в истории математики события: отныне кафедра отдана попечению Бернулли на 100 лет. Члены же этой семьи будут профессорами родного университета на протяжении четверти тысячелетия.

В том же году Я. Бернулли прочитал в «Acta Eruditorum» за 1684 г. «Новый метод» Лейбница и, обна-

ружив трудные места, письменно обратился к Лейбницу за консультацией. Лейбниц, находившийся в длительной служебной поездке, получил письмо только через три года, когда надобность в консультации отпала: Якоб совместно с Иоганном овладели дифференциальным и интегральным исчислениями настолько, что вскоре смогли приступить к систематическому развитию метода. Образовавшийся триумvirат — Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли — менее чем за двадцать лет чрезвычайно обогатил и распространил анализ бесконечно малых.

Уже в 1690 г., т. е. как раз тогда, когда Лейбниц вернулся в Ганновер и смог прочесть ждавшее его письмо, Якоб поместил в «Acta Eruditorum» статью, содержащую решение задачи Лейбница. В 1687 г. Лейбниц предложил найти кривую, по которой тяжелая точка опускается в равные промежутки времени на равные высоты. Такая кривая получила название изохронной. В статье с решением задачи об изохроне впервые встречается слово «интеграл».

Слава Я. Бернулли росла. В 1699 г. Якоб и Иоганн Бернулли вместе с Ньютоном, Лейбницем, О. Ремером (1644—1710) были избраны иностранными членами Парижской академии наук. В 1701 г. братья избраны членами Берлинской академии наук (по представлению Лейбница).

Основные научные интересы Я. Бернулли были сосредоточены на развитии и приложениях анализа. Освоив алгоритм Лейбница, он применил его к исследованию свойств кривых. Совместно с братом он заложил основы вариационного исчисления. Важную роль здесь сыграла решенная задача о брахистохроне и выдвинутая им и частично решенная изопериметрическая задача.

Я. Бернулли открыл числа, названные впоследствии его именем. Он выполнил значительные исследования в области числовых рядов. Пять его мемуаров под названием «Арифметические предложения о бесконечных рядах и их конечных суммах» (1689—1704 гг.) были первым руководством по теории числовых рядов.

Основополагающий вклад сделал Я. Бернулли в теорию вероятностей. Им разработана схема Бернулли — одна из основных моделей теории вероятностей. Она позволила открыть важнейшую закономерность теории вероятностей, простейшую форму закона

больших чисел, теорему, названную впоследствии его именем. Я. Бернулли занимался также физическими задачами: определением центров качания тел, упругой защемленной одним концом и нагруженной сосредоточенным весом балки, вычислением сопротивления жидкости движущимся в ней телам различной формы.

Спор между братьями возник в 1694—1695 гг. Самомнение Иоганна и зависть внушили ему мысль о том, что Якоб ему уступает, что его не следует считать значительным математиком. Видимые поводы для этого были: решения Иоганна блистали изяществом и простотой. Но он не мог не заметить, что за внешней громоздкостью работ брата кроется их фундаментальность, глубина.

Якоб был обижен нападками брата. Его раздражительность усиливалась тяжелым заболеванием (туберкулезом).

Спор велся в резких тонах, сопровождался взаимными насмешками, оскорблениями. В 1695 г. Якоб предал спор гласности в «Acta Eruditorum», выступив против брата с пападками. В 1697 г. он решил задачу о брахистохроне и с новыми издевательствами над братом поставил изопериметрическую задачу. Иоганн объявил, что ему достаточно трех минут для преодоления трудностей¹⁶. На это Якоб ответил, что он: 1) разгадает метод решения, 2) укажет ошибку в нем, 3) опубликует правильное решение. За неисполнение указанного он обязался выплатить 50, 100 и 150 имперялов. Как видно, спор шел, как говорят в народе, «на характер» и изнурял ту и другую стороны.

Через четыре года редакция журнала заявила, что отказывается предоставлять место для продолжения дискуссии. Но и это не оказало своего воздействия; конец спора наступил со смертью Якоба. Только много лет спустя Иоганн признал, что в некоторых поспешных решениях допускал ошибки.

Соревнование между математиками в постановке и решении задач анализа, дифференциальных уравнений, вариационных проблем способствовало развитию математики. Даже ожесточенный спор между Якобом и Иоганном Бернулли, не имевший никакой основы и отравлявший тому и другому жизнь, способствовал постановке новых проблем.

Последние годы жизни Я. Бернулли омрачились «изнурительной лихорадкой, высасывающей здоровье

по каплям». Этими словами один из биографов Бернулли описывает состояние туберкулезного больного. 16 августа 1705 г. Я. Бернулли скончался. По желанию покойного, на его памятнике высечено изображение логарифмической спирали с надписью на латинском языке: «Измененная, я возрождаюсь грешней»¹⁷.

Собрание сочинений Я. Бернулли вышло в Женеве в 1744 г. Его «Искусство предположений» издал племянник Николай в Базеле в 1713 г. Четвертая часть «Искусства предположений», содержащая теорему Бернулли, переведена на русский язык (СПб., 1913). Некоторые работы Я. Бернулли с возражениями или критикой решения Иоганном изопериметрической задачи вошли в собрание сочинений Иоганна.

Уже говорилось, что в 1690 г. Я. Бернулли поместил в «Acta Eruditorum» решение поставленной Лейбницем в 1687 г. задачи об изохроне. Гюйгенс сообщил, что кривой будет полукубическая парабола. Лейбниц доказал это; правда, он не пользовался новыми методами. Интересно, что Я. Бернулли решил задачу с помощью бесконечно малых, чтобы «побудить знаменитого геометра (Лейбница. — В. Н.) к применению его метода к новой предложенной им задаче».

Я. Бернулли из геометрических соображений получил дифференциальное уравнение искомой кривой $\sqrt{b^2y - a^3}dy = \sqrt{a^3}dx$. Он отметил, что из равенства дифференциалов следует равенство интегралов от них¹⁸, и после интегрирования нашел уравнение изохроны $(2b^2y - 2a^3)\sqrt{b^2y - a^3}/3b^2 = x\sqrt{a^3}$.

В конце статьи Я. Бернулли поставил задачу о форме кривой, по которой расположится подвешенная за концы однородная гибкая нить под действием собственного веса. Ее упоминал еще Жирар в 1634 г., указавший, что кривая будет параболой. Галилей в «Беседах и математических доказательствах» отметил, что кривая близка к параболе. Задачу, кроме Я. Бернулли, решили Лейбниц, И. Бернулли и Гюйгенс. Гюйгенс дал решение старыми методами, а братья Бернулли и Лейбниц с помощью исчисления бесконечно малых. И все получили один и тот же результат. Тогда еще не была введена показательная функция, но геометрическое построение кривой, данное Лейбницем, соответствует современному уравнению цепной линии $y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$.

В этом же году Я. Бернулли опубликовал работу, посвященную исследованию параболической спирали, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $(\rho - a)^2 = 2a\rho\theta$. Он для случая $a/\rho = 4\pi$ построил касательные к кривой, нашел квадратуру, точку перегиба, рассмотрел вопросы о радиусах кривизны и эволюте. Попытка спрямить дугу спирали привела Я. Бернулли к первому в истории математики эллиптическому интегралу. Он выразил в виде эллиптического дифференциала элемент дуги спирали, откуда вывел возможность сравнения различных частей дуги.

В 1692 г. Я. Бернулли заинтересовался вопросом, в каких случаях можно квадрировать в аналитическом виде площадь, ограниченную алгебраической кривой,

т. е. при каких условиях $\int_0^x y dx$ будет алгебраической функцией x , если y — неявная функция, определяемая многочленом n -й степени $f(x, y) = 0$. Впоследствии он привел интересный пример: трансцендентная кривая $y = \ln 1/(1 - x)$ допускает квадрирование

$$\int_0^x y dx = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots$$

Хотя эта квадратура при произвольном x неопределенна, но «в целом» рациональна, так как $\int_0^1 y dx = 1$.

Эллиптические интегралы вновь возникли в исследованиях Я. Бернулли, когда он решал задачу об определении упругой линии балки, защемленной одним концом. В этом случае он представил в виде рядов интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \dots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 15} + \dots,$$

которые получил сравнением с известным интегралом

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 12} + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 16} + \dots = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В работах о форме упругих линий Я. Бернулли проанализировал представление кривой $y = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$

с помощью квадратуры или спрямления кривой второго порядка. Он рассмотрел также элемент дуги кривой, заданной параметрически, и свел его к элементу дуги открытой и носящей его имя лемнискаты ¹⁹.

Эллиптические интегралы Я. Бернулли вычислял с помощью двух кривых шестого и пятого порядков. Он сформулировал некоторую классификацию интегралов. Простейшие трансцендентные кривые связаны с квадратурами эллипса и гиперболы. Выражение $t^2 dt / \sqrt{t^4 - a^4}$ получается в задаче о спрямлении гиперболы, дифференциал $a^2 dt / \sqrt{\pm (a^4 - t^4)}$ — в задаче о спрямлении лемнискаты, дифференциал $t dt / \sqrt{a^4 - t^4}$ представляет комбинацию спрямления эллипса и лемнискаты.

В публикации 1695 г. Я. Бернулли привел уравнение $y' = py + qy^n$, к которому он пришел, обобщая задачу Дебона ²⁰. Для уравнения $ay' = y + q$ он предложил геометрическое построение, позволяющее находить решение уравнения в виде квадратуры

$$ay = e^{x/a} \int q e^{-x/a} dx.$$

Такие уравнения относятся к классу линейных и решаются стандартным методом. Будем искать функцию y в виде произведения двух функций $y = uv$; тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим y и y' в уравнение: $au'v + av'u - uv = q$, $au'v + u(av' - v) = q$. Подберем v так, чтобы второе слагаемое в левой части обратилось в 0, т. е. потребуем $av' - v = 0$. Получим $adv/dx = v$, $dv/v = dx/a$, $\ln |v| = x/a$, $v = e^{x/a}$. Подставим значение v в уравнение, после чего из него найдем u :

$$ae^{x/a} u' = q, \quad u' = e^{-x/a} q/a, \quad u = \frac{\int e^{-x/a} q dx}{a} + C. \text{ Это дает}$$

$$\begin{aligned} y = uv &= e^{x/a} \left(\frac{\int e^{-x/a} q dx}{a} + C \right) = \\ &= e^{x/a} \frac{\int e^{-x/a} q dx}{a} + C e^{x/a}. \end{aligned}$$

Перепишем результат так:

$$y = e^{x/a} \frac{\int_0^x e^{-x/a} q dx}{a} + C e^{x/a}.$$

В то время еще не вошла в употребление аддитивная произвольная постоянная при вычислении неопределенных интегралов, что означало отыскание не общего, а некоторого частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию. Зададим начальное условие $y(0) = 0$ и найдем по нему

значение константы C : $0 = \int_0^0 \frac{q}{a} dx + C$, $C = 0$ и $ay = \int e^{-x/a} q dx$, т. е. то же самое, что и у Я. Бернулли.

Из сказанного следует, что развитие идеи интеграла в творчестве Я. Бернулли претерпело существенные качественные изменения: формировалось интегральное исчисление как метод. Большое внимание уделялось исследованию кривых (функций), отысканию приемов вычисления сложных интегралов сведением к известным, решению задач с помощью дифференциальных уравнений.

Еще в большей степени отмеченные особенности развития присущи творчеству И. Бернулли. Третий сын и десятый ребенок в семье, Иоганн Бернулли родился 27 июля 1667 г. Пошел в школу на шестом году, окончил ее в 1682 г., после чего был отправлен отцом в Невшатель для торговой практики и совершенствования во французском языке. Через год возвратился в Базель и поступил в университет. Вскоре защитил диссертацию, написанную латинскими стихами, и получил степень бакалавра. В 1685 г. защитил еще одну диссертацию, написанную греческими стихами, получил степень магистра искусств (доктора философии, как пишет Иоганн в автобиографии). В это же время по совету Якоба начал заниматься математикой и медициной. Легкость, с которой Иоганн овладевал математикой, поразительна. За два года были изучены все известные в то время труды древних и новых математиков, включая «Геометрию» Декарта. Вместе с Якобом Иоганн изучил «Новый метод» Лейбница и включился в активную работу по развитию анализа бесконечно малых. Одновременно он изучал и медицину: в сентябре

1690 г. защитил диссертацию, получил звание лиценциата медицины, дающее право на чтение лекций. Затем И. Бернулли отправился в длительное путешествие; около года шил в Женеве, потом переехал в Париж. Пребывание его там сыграло значительную роль в приобщении французских математиков к школе Лейбница.

В Париже Иоганн познакомился с механиком и математиком П. Вариньоном (1654—1722) и Г. Лопиталем (1661—1704), имевшим репутацию одного из крупнейших французских математиков. В беседах с Иоганном Лопиталь обнаружил, что считаемые им очень трудными задачи Иоганн решает быстро и легко. Он был поражен знаниями Иоганна и, не посчитавшись ни с возрастом (он был старше Иоганна на 6 лет), ни с общественным положением (Лопиталь — маркиз, владелец богатейшего майората), попросил Иоганна прочитать ему лекции по новому исчислению. Сначала это были беседы, но вскоре Лопиталь предложил Иоганну передавать ему заранее написанные лекции. Иоганн принял предложение. Вероятно, он думал воспользоваться ими впоследствии для создания своего курса, так как снимал копии лекций. (Заметим, что в «Автобиографии» Иоганн умолчал, что получил от Лопиля за свой труд значительный гонорар.) Однако Лопиталь, как известно, опередил учителя и издал «Анализ бесконечно малых» в 1693 г. Курс же И. Бернулли увидел свет не скоро: в третьем томе его сочинений (1742) напечатаны «Математические лекции о методе интегралов и других вопросах, написанные для знаменитейшего маркиза Лопиля», а «Лекции по исчислению дифференциалов» обнаружены в рукописях библиотеки Базельского университета в нашем столетии и изданы только в 1922 г. Несмотря на то, что курс был прочитан одному слушателю, он сыграл существенную роль в становлении анализа, так как благодаря Лопиталю стал известен многим.

В ноябре 1692 г. по настоянию родных Иоганн возвратился домой и продолжал изучать медицину²¹. В 1694 г. он получил степень доктора медицины после защиты диссертации «О движении мускулов», где задачи о форме и движении мускулов решались методами анализа бесконечно малых.

В Базеле, где университетская кафедра математики была занята старшим братом, Иоганн не мог рассчитывать на место, соответствующее его выдающимся данным.

В 1695 г. поступило приглашение из Гронингена (северо-запад Голландии), и он переехал с семьей туда.

В Гронингене Иоганн прожил 10 лет. Кроме курса математики, он читал еще экспериментальную физику. Популярность его была очень велика. Сам Иоганн писал, что на лекциях, диспутах и занятиях у него дома неизменно бывало много народу. Университет небольшого городка с математиком такого масштаба выдвинулся на одно из первых мест в Европе.

В 1705 г. Иоганн покинул Гронинген и, отвергнув настойчивые и выгодные предложения Лейденского, Утрехтского и других университетов, направился в Базель, где занял кафедру математики, освободившуюся после смерти брата. Городской магистрат назначил надбавку к жалованью на то время, пока кафедру будет занимать Иоганн. 17 ноября 1705 г. он принимает кафедру; вступительная лекция «О новых фактах анализа и высшей геометрии» собирает огромную аудиторию.

И. Бернулли возглавлял кафедру математики Базельского университета 42 года. Его лекции слушали студенты, профессора, доктора, академики из Англии, Франции, Италии, Швеции и других стран. Он вел чрезвычайно деятельную жизнь: читал лекции, председательствовал и выступал на диспутах, руководил факультетом и университетом (был восемь раз деканом философского факультета и два раза ректором университета), переписывался с математиками, физиками, академиями, членом которых состоял, никогда не прекращал интенсивную научную работу. Кроме того, регулярно проводил «приватные коллегии», т. е. читал лекции у себя на дому. На эти лекции собирались близкие ему люди: сыновья Николай, Даниил, Иоганн, два брата Гесснеры, Мопертюи и др.

Он выполнил громадную работу по улучшению постановки среднего образования в Базеле. Общепризнанный выдающийся математик, «Архимед нашего века», как его называли современники, при всей своей занятости И. Бернулли находил время для выполнения поручения городского магистрата: в течение целого года ежедневно проводил несколько часов в школах города. Следует учесть, что ему тогда было 58 лет.

Как многие великие люди, И. Бернулли был счастлив в учениках: в молодости обучал Г. Лопиталья, П. Вариньона, А. Клеро (1713—1765), в университете его слушали Эйлер, сыновья, Г. Крамер (1704—1752),

И. Кениг (1722—1757) и другие выдающиеся математики. Особое внимание он уделял будущему великому математику Леонарду Эйлеру: с ним проводил занятия отдельно, каждую субботу.

И. Бернулли был избран членом академий: Парижской — в 1699 г., Берлинской — в 1701 г., Лондонского королевского общества — в 1712 г., Петербургской — в 1725 г.

Многогранная педагогическая деятельность И. Бернулли привела к созданию школы выдающихся математиков, которой Суждено было в следующем поколении еще более развить новую математику.

Как известно, И. Бернулли обладал дурным характером: был тщеславен, мнителен, завистлив. О вызывающей сожаление ссоре его со старшим братом сказано выше. Он конфликтовал и с сыном Даниилом в связи с тем, что некоторые вопросы в их работах нашли аналогичные трактовки. Но вот разгорелся спор с англичанами о приоритете в открытии анализа; И. Бернулли энергично включился в него. И это естественно: ведь речь шла не только о Лейбнице, а и о том, что сделано обоими братьями; не зря же Лейбниц подчеркивал авторство всего триумвиата.

После смерти Лейбница И. Бернулли возглавил борьбу с англичанами и, надо сказать, вел ее достаточно успешно. Он вступил также в приоритетный спор с Тейлором, обвинив его в плагиате решения задачи об определении центра колебаний. Известны достаточно обоснованные претензии И. Бернулли на авторство «Анализа бесконечно малых» Лопиталя. И уж правило Лопиталя, безусловно, следует называть правилом Бернулли—Лопиталя.

Жизнь И. Бернулли в науке была заполнена интенсивным трудом и «сражениями». А внешними событиями она небогата. Достаточно попутешествовав смолоду, он безвыездно прожил в родном городе с 1705 г. по день смерти — 1 января 1748 г. Необыкновенно крепкое здоровье И. Бернулли заметно пошатнулось лишь в последние недели 1747 г., но такова была привычка к труду, что он продолжал ежедневно трудиться до полуночи. И. Бернулли скончался восьмидесяти пяти лет. Последним деянием его было издание переписки с Лейбницем — сокровищницы идей нового метода.

Собрание сочинений И. Бернулли (*Opera omnia. Lausannae; Genevae, 1742. Vol. 1—4*), так же как и соб-

рание сочинений Я. Бернулли, подготовлено к изданию Крамером.

Заслуги И. Бернулли в науке чрезвычайно весомы. Он вместе с братом утвердил и развил дифференциальное и интегральное исчисления как основу инфинитезимальных исчислений и установил применимость их к большому кругу областей. Он дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений, нашел новые методы решения дифференциальных уравнений, был одним из создателей вариационного исчисления, впервые поставил задачу о геодезических линиях, нашел геометрическое свойство геодезических и составил их дифференциальное уравнение, успешно решал задачи в теории колебаний, теории удара, гидравлике, сформулировал (в письме Вариньону) принцип возможных перемещений.

Как уже упоминалось, первая статья И. Бернулли появилась в июньском выпуске «Acta Eruditorum» за 1691 г.; посвящена она задаче о цепной линии. В публикации сформулировано 13 свойств цепной линии и указан метод построения ее; подробное объяснение решения и вывод дифференциального уравнения кривой И. Бернулли привел в лекциях по интегральному исчислению (1691—1692 гг.), изданных в 1742 г.

Если выбрать систему координат так, чтобы осью симметрии кривой была ось Oy , то дифференциальное уравнение цепной линии будет $y'' = \sqrt{1 + y'^2}/a$, где a — некоторая постоянная. Оно сводится к уравнению первого порядка заменой $y' = z(x)$. Решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = a$, $y'(0) = 0$, имеет вид $y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2 = a \operatorname{ch}(x/a)$.

И. Бернулли выбрал в качестве оси симметрии ось Ox и получил для искомой кривой уравнение первого порядка $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Его интегрирование он не смог произвести, но свойства кривой и ее построение указал в деталях. Заметим, что это была одна из первых задач по механике нити.

Чтобы представить, сколько неудобств приходилось испытывать основателям анализа из-за того, что тогда не было еще понятий логарифмической и показательной функций, обратимся к одной из задач И. Бернулли, изложенной в лекции X «Математических лекций о методе интегралов...».

Решалась задача, приводящаяся к уравнению $ydx = -ady$. Чего проще, казалось бы: $dx/a = dy/y$, $x/a = \ln y - \ln C$, $x/a = \ln y/C$, $y = C e^{x/a}$. И все. Но это — сейчас. Тогда было не так. Вот задача и ее решение. Требуется найти кривую, подкасательная которой постоянна и равна, скажем, a . И. Бернулли рассуждал так. По условию $dy : dx = y : a$, поэтому $ydx = ady$, $dx = ady/y$. Умножим левую и правую части равенства на a и получим $adx = a^2 dy/y$. Построим теперь кривую. На рис. 22, взятом из книги И. Бернулли, LH и AO — оси координат. Отложим на вертикальной оси отрезки AB, AN, AO, \dots , равные значениям y . Из точек B, N, O, \dots восставим перпендикуляры BK, NE, OF, \dots и отложим на них отрезки $a^2 : y$. Точки K, E, F, \dots будут лежать на гиперболе KF с асимптотами AL и AO . Затем построим отрезки, перпендикулярные прямой AH в точках A, G, H, \dots и равные a ; прямая IPQ будет параллельной AH . В заключение Бернулли пишет: «Если затем взять гиперболическую площадь KN равной прямоугольнику AP , а KO равной AQ , то точки встречи D, C и т. д. будут лежать на искомой кривой. Таким образом, если AG, AH и т. д. суть арифметические пропорциональные, то AB, AN, AO и т. д. будут геометрическими пропорциональными, так как площади KN, EO и т. д. должны быть равны. Следовательно, кривая BDC логарифмическая».

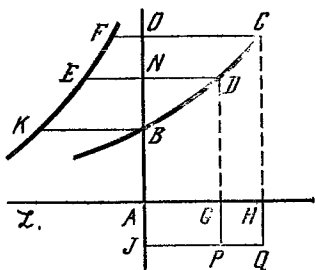


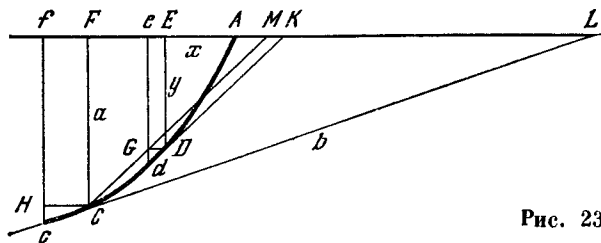
Рис. 22

Вариация той же темы прослеживается и при решении И. Бернулли уравнения $axdy - ydx = 0$. Опять же любой студент института поступит так: $ady/y = dx/x$, $a \int dy/y = \int dx/x + \ln C$, $\ln y^a = \ln C |x|$, $y^a = Cx$. Бернулли этого делать не мог. Он ввел интегрирующий множитель y^{a-1}/x^2 , после умножения на который обеих частей уравнения получил

$$ay^{a-1}dy/x - y^adx/x^2 = 0, \quad d(y^a/x) = 0,$$

$$y^a/x = C, \quad y^a = Cx^{22}.$$

Из этих примеров видно, что все трудности, возникающие при решении подобных дифференциальных урав-



Нений, объясняются тем, что в математике существовали логарифмы чисел, выражающие соответствие между членами определенной арифметической и определенной геометрической прогрессий, а не общее понятие логарифма. После того как было замечено, что таким же свойством обладают площади криволинейных трапеций, ограниченных гиперболой, заданной уравнением $xy = k^2$, полученных при разбиении промежутка изменения x на частичные промежутки, стало естественным геометрическое толкование логарифма как площади и введение логарифмической функции для непрерывного изменения x .

В связи с этим значительно расширилась область интегрируемых функций: уже И. Бернулли производил интегрирование $\lg x$, $x \lg x$, $1/x \lg x$. С появлением логарифмической функции стало возможно интегрировать рациональные дроби.

Решение задачи об изохроне И. Бернулли также изложил в лекциях по интегральному исчислению. Вот оно. Пусть искомой кривой будет ADC (рис. 23). Материальная точка за время Δt перемещается из точки D в точку d и из точки C в точку c . По условию задачи проекции дуг Dd и Cc на вертикаль одинаковы. Проведем через D и C касательные к кривой до пересечения с продолжением AF . Отрезки касательных будут DK и CL . Напишем тождество $Dd/Cc = Dd/Hc \cdot Hc/Cc$. Дуги Dd и Cc малы, поэтому фигуры GDD и HCC можно считать треугольниками. Из подобия треугольников GDD и DEK , HCC и CFL получим

$$Dd : DG = DK : DE, \quad Cc : Hc = CL : CF.$$

С помощью этих пропорций найдем $Dd:Cc = \frac{DG}{Hc} \cdot \frac{DK}{DE} \cdot \frac{CF}{CL}$. По условиям задачи $DG:Hc = 1$, поэтому $Dd:Cc = \frac{DK}{DE} \cdot \frac{CF}{CL}$. Проведем через точку C

прямую CM , параллельную DK . Тогда $DK : DE = CM : CF$, $Dd : Cc = CM : CL$.

Но отношение $Dd : Cc$ равно отношению скоростей (интервал Δt один и тот же), квадраты же скоростей, по найденному Галилеем закону, относятся, как пройденные высоты; это дает

$$Dd^2 : Cc^2 = CM^2 : CL^2 = DE : CF, \quad CM^2 : CL^2 = DE : CF.$$

Последнее равенство означает, что если через две произвольные точки кривой провести касательные CL и DK и через точку C провести CM параллельно DK , то должна выполняться указанная пропорция. Таким свойством обладает искомая кривая. Задача оказалась сведенной к классу обратных задач на касательные. Разработанный Лейбницем метод позволял решать их.

Выберем начало координат в точке A . Обозначим $AE = x$, $ED = y$. Тогда $GD = dx$, $Gd = dy$. Обозначим также $CF = a$, $CL = b$. Треугольники FCM и GdD подобны, отсюда

$$Gd : Dd = FC : CM.$$

Но $Dd = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, поэтому $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} = a : CM$, откуда $CM^2 = (a^2 dx^2 + a^2 dy^2) : dy^2$.

Подставим найденное выражение в пропорцию $CL^2 : CM^2 = CF : CE$ и получим дифференциальное уравнение $b^2 dy^2 / (a^2 dx^2 + a^2 dy^2) = a / y$. Пресобразуем его: $b^2 y dy^2 - a^3 dy^2 = a^3 dx^2$, $(b^2 y - a^3) dy^2 = a^3 dx^2$, $\sqrt{b^2 y - a^3} dy = \sqrt{a^3} dx$. В уравнении переменные разделены, интегрирование его дает искомую кривую $(2b^2 y - 2a^3) \sqrt{b^2 y - a^3} / 3b^2 = x \sqrt{a^3}$.

И. Бернулли упростил уравнение кривой. Когда $x = 0$, получается $y = a^3 / b^2$. Это означает, что материальная точка, прежде чем достичь кривой, будет падать из точки A и пройдет расстояние $AO = a^3 / b^2$. И. Бернулли обозначил $y - a^3 / b^2 = z$ и записал

$$2z \sqrt{b^2 z} / 3 = x \sqrt{a^3}, \quad 4z^3 b^2 / 9 = x^2 a^3, \quad z^3 = 9a^3 x^2 / 4b^2.$$

Полученную полукубическую параболу он называл кубической параболой второго рода с параметром $9a^3 / 4b^2$.

И. Бернулли был автором знаменитой в истории математики задачи о брахистохроне (кривой наискорейшего спуска)²³. В июньской книге «Acta Eruditorum»

за 1696 г. он опубликовал заметку «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Значимость ее состояла в том, что она послужила толчком в исследовании проблем, составивших содержание новой отрасли математики — вариационного исчисления. Вот ее формулировка. Даны не лежащие на одной вертикали точки A и B . Из всех кривых, соединяющих эти точки, найти ту, двигаясь по которой материальная точка затратит на прохождение пути от A к B наименьшее время.

Галилей сравнивал движение материальной точки из состояния покоя в положении A по наклонной плоскости до B с движением по дуге окружности, проходящей через A и B , и установил, что более быстрым будет спуск по дуге окружности. И. Бернулли обобщил задачу и рассматривал произвольные кривые, проведенные через A и B , и искал ту, которая даст минимальное время спуска. Такую кривую называли брахистохроной. И хотя она оказалась знакомой математикам того времени циклоидой ²⁴, новизна задачи очевидна: отыскивается не экстремум функции; сама неизвестная функция должна быть минимальной.

Эту, по словам Лейбница, столь прекрасную и неслыханную задачу, решили И. и Я. Бернулли, Лейбниц, Ньютон, Лопиталь. На решение ее отводилось полгода, за это время справился с ней лишь Лейбниц. По обычаю того времени он сообщил об этом И. Бернулли в письме.

Ньютон опубликовал результат в майском номере «Acta Eruditorum» за 1697 г., без подписи. И. Бернулли не составило труда установить имя таинственного автора. Он узнал «почерк» Ньютона, «как по когтям узнают льва». Решения И. и Я. Бернулли, а также Лопиталья напечатаны в майском номере «Acta Eruditorum».

Общий метод решения задачи о брахистохроне содержался в работе Я. Бернулли. Я. Бернулли опирался на принцип, применимый во многих случаях. По этому принципу максимальным или минимальным свойством будет обладать вся кривая только в том случае, когда таким свойством обладают мельчайшие ее части. Метод И. Бернулли не обладал общностью, но отличался богатством фантазии и поражал изяществом. Он основывался на оптико-механической аналогии, нашедшей развитие в XIX в. в трудах У. Р. Гамильтона. Д. Пойя

назвал решение И. Бернулли настоящим произведением искусства.

Не будем рассматривать решение И. Бернулли ²⁵: о стиле Бернулли можно судить по двум приведенным задачам. Отметим лишь, что он был восхищен совпадением брахистохроны с таутохроной Гюйгенса ²⁶ и видел причину этого в простоте действия природы.

К середине девяностых годов XVII в., т. е. всего через десять лет после появления основополагающего труда Лейбница, усилиями Лейбница и братьев Бернулли идеи дифференциального и интегрального исчисления достигли такого развития, что назрела необходимость собрать воедино и систематизировать разработанные методы, с тем чтобы ими мог пользоваться более широкий круг людей. Эту задачу блестяще выполнил И. Бернулли, создавший «Лекции по исчислению дифференциалов» и «Математические лекции о методе интегралов...».

Завершение лекций дало возможность И. Бернулли писать в автобиографической заметке, что он «был первым, кто подумал об изобретении метода для перехода от бесконечно малых количеств к конечным, элементами которых эти бесконечно малые суть. Я назвал этот метод интегральным исчислением, не найдя более подходящего слова». Хотя И. Бернулли лекции и не издал, они были доступны французским математикам и сыграли важную роль в прогрессе анализа.

Лекции И. Бернулли, так же как и «Анализ» Лопиталя, содержали небольшой набор основных аналитических понятий, иллюстрируемых чертежами, теорем, правил и множество задач геометрического, механического и физического характера.

Первая лекция по интегральному исчислению — «О природе и вычислении интегралов» — начинается словами: «Выше мы видели, как находятся дифференциалы количеств; теперь, наоборот, покажем, каким образом находят интегралы дифференциалов, т. е. то количества, которых дифференциалы даны». Слово «выше» снабжено сноской, поясняющей, что автор имел в виду лекции по дифференциальному исчислению, «которые он счел нужным выбросить, так как все содержание их было включено знаменитым Лопиталем в пользующуюся всеобщим распространением книгу».

Сразу же после этого И. Бернулли писал: «Из предыдущего известно, что dx есть дифференциал x ,

что xdx есть дифференциал $x^2/2$ или $x^2/2$ плюс или минус постоянная, x^2dx — дифференциал $x^3/3$ плюс или минус постоянная... также adx — дифференциал ax и т. д., $axdx$ — дифференциал $ax^2/2$ и т. д., ax^2dx — дифференциал $ax^3/3$ и т. д., ax^3dx дифференциал $ax^4/4$ и т. д.» После этого даю общее правило: « ax^pdx есть дифференциал количества $ax^{p+1}/(p+1)$ ». Иными словами:
$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C.$$
 Бернулли применил это правило к случаю $p = -1$ и получил $\int dx/x = \infty$. Однако впоследствии он исправил ошибку.

Затем рассматриваются вариации общей формулы: случаи, когда можно выделить дифференциал подкоренного выражения, и т. д.

Вторая лекция посвящена вычислению площадей. И в этом вопросе И. Бернулли развивал идеи Лейбница и писал: «Площади рассматривают как разложенные на части, каждую из которых можно считать дифференциалом площади. Если имеют интеграл этого дифференциала, т. е. сумму этих частей, то отсюда будет известна и искомая квадратура» [48, с. 11—12].

После обсуждения различных способов разбиения фигуры И. Бернулли говорит: когда частичные площадки ограничены ординатами и кривой, дифференциал каждой из них будет ydx . Если кривая задается, то y выражается через x вполне определенно и ydx будет «полностью выражаться через x ». Он привел пример: дана парабола $y^2 = ax$; дифференциал площади будет $\sqrt{ax}dx$, его интеграл $2x\sqrt{ax}/3$, или $2xy/3$. С необычайной простотой И. Бернулли нашел результат, считающийся важнейшим достижением геометрии древних, состоящий в том, что площадь сегмента параболы равна $2/3$ площади соответствующего прямоугольника.

Содержание следующих лекций весьма разнообразно: квадратуры площадей, кривых, «обратные задачи», соприкасающиеся кривые и эволюты, каустики; завершают книгу пять лекций, посвященных решению физико-математических задач.

Поражает в тех и других лекциях, кроме содержания, высочайшее методическое мастерство. Все в них, как у опытного лектора наших дней. А ведь тому лектору было всего 24 года. И лекций по анализу бесконечно малых до него не читал никто.

Руководствуясь тем, что интегрирование является обратной операцией дифференцированию, И. Бернулли

вычислил многие неопределенные интегралы. Когда ему приходилось рассматривать новый дифференциал, он с помощью алгебраических преобразований приводил его к такому виду, чтобы можно было установить, дифференциалом какого выражения он служит; это выражение и будет интегралом данного дифференциала.

И. Бернулли часто пользовался заменой переменной. Например, интеграл $\int (x \sqrt{ax - x^2})^{-1} a^3 dx$ он подстановкой $m^2 = a^2 x^2 / (ax - x^2)$ привел к $\int (2a^3/m^2) dm$ и вычислил его. Интеграл $\int x^{-1} \sqrt{x^2 + 2ax + a^2} dx$ подстановкой $y^3 = x + a$ он преобразовал к $\int [3y^2/(y^3 - a)] dy$ и заметил: «Если отсюда можно получить интеграл, то имеем интеграл и от заданной величины» [48, с. 11]. Понятна такая осторожность: в 1692 г. И. Бернулли не владел методом представления рациональной дроби в виде суммы простейших; не было еще и функций $\ln x$ и $\arctg x$.

Как и у брата, интегрирования И. Бернулли в большинстве своем связаны с решением конкретных задач. Но были работы, посвященные собственно интегрированию. В некоторых из них, гораздо позднее, И. Бернулли обосновал метод интегрирования рациональных дробей, носящий теперь название метода неопределенных коэффициентов. Ранее, в письмах Лейбницу (1702 г.), он утверждал, что рациональные функции должны интегрироваться в рациональных, логарифмических и круговых функциях.

При вычислении интегралов И. Бернулли пользовался и разложением подынтегральной функции в ряд. В 1694 г. он нашел общую формулу разложения в ряд интеграла от функции y по степеням аргумента: $\int y dx = yx - x^2/2! \cdot dy/dx + x^3/3! \cdot d^2y/dx^2 - x^4/4! \cdot d^3y/dx^3 + \dots$, которую и применял в дальнейшем. Тогда же он получил дифференциал логарифма, а значит, и $\int dx/x$; в 1697 г. дифференцировал и интегрировал показательные и логарифмические функции.

Приведем теперь оценку творчества Я. и И. Бернулли, данную Лейбницем в 1701 г.: «Я ценю их обоих, как только можно ценить наиболее глубоких гениев в математике. Я многим обязан тому и другому. . . , так как главным образом благодаря их открытиям разрозненные семена моего метода смогли принести столько добрых плодов».

В конце октября 1983 г. произошло знаменательное событие в культурной жизни нашей страны: Президиум АП СССР, Отделение математики, Отделение общей физики и астрономии, Отделение механики и процессов управления, Отделение философии и права, Математический институт им. В. А. Стеклова, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, Физический институт им. П. Н. Лебедева, Институт проблем механики и Институт истории естествознания и техники АН СССР провели 24 и 25 октября в Москве и 27 и 28 октября в Ленинграде торжественные заседания и симпозиум «Развитие идей Эйлера в современную эпоху», посвященные 275-летию со дня рождения и 200-летию со дня смерти академика Л. Эйлера.

Творчество Эйлера составляет эпоху не только в развитии математики, но и механики, физики, астрономии и ряда других наук, составляющих точное естествознание. Эйлеру принадлежат выдающиеся достижения в математическом анализе, вариационном исчислении, интегрировании дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, теории чисел, топологии, гидродинамике, математической физике, теории теплоты, оптике, механике твердого тела, механике машин, сопротивлении материалов, гидравлике, теории навигации, баллистике и др. Не чуждался Эйлер и практики. Он ввел в математику тригонометрические функции, и во всех школах Земли дети до сих пор изучают их по Эйлеру. Он употреблял некоторые символы и термины, получившие распространение и дошедшие до наших дней (например, обозначения π и e , «мантисса» логарифма). Можно безошибочно сказать, что нет ни одной точной науки, в которой бы не сохранилось имя Эйлера.

Эйлер был фантастически работоспособен. Его перу принадлежат 886 статей и мемуаров²⁷, среди которых «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически» (1736), содержащая 1000 страниц большого формата, двухтомное «Введение в анализ бесконечно малых» (1748), двухтомная «Морская наука» (1749), двухтомное «Дифференциальное исчисление» (1755), трехтомное «Интегральное исчисление» (1768—1770) и др. Книги Эйлера долгое время служили основными руководствами для исследователей.

При жизни Эйлера было напечатано 530 статей и

мемуаров. К 1826 г. в «Комментариях Петербургской академии наук» опубликована еще 241 работа. В 1909 г. «Швейцарское общество естественных наук» приняло решение издать полное собрание сочинений Эйлера, состоящее, по предварительным подсчетам, из 72 томов объемом примерно по 600 страниц каждый. К 1927 г. вышло 23 тома, к 1956 г.—40. Эйлер вел огромную переписку с более чем 270 корреспондентами. Около 3000 писем должны заполнить дополнительно к 72 томам еще 8 томов.

Эйлер получил больше всех современников премий Парижской академии наук за конкурсные работы— 14.

Эйлер был выдающимся вычислителем. Однажды во время бессонницы он вычислил шестые степени всех первых натуральных чисел от 1 до 100 и полученную таблицу воспроизвел по памяти через несколько дней. Он также в течение часа определил первые 20 цифр числа π . Таких примеров можно привести много.

Научный подвиг Эйлера выступает поистине гигантским, если учесть, что вскоре после возвращения из Берлина в Петербург в 1766 г. он ослеп. Но его продуктивность ничуть не уменьшилась: до 1783 г. (года смерти) он продиктовал своим ученикам и помощникам 416 работ, примерно по 25 в год.

Эйлера изучали и высоко ценили все последующие великие математики. «Читайте Эйлера,— говорил П. С. Лаплас,— это наш общий учитель». К. Ф. Гаусс сказал: «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить».

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в Базеле, в семье пастора Пауля Эйлера. Отец Л. Эйлера слыл любителем математики, учился у Я. Бернулли и защитил диссертацию по теории пропорций и отношений. Он видел в сыне будущего пастора, но склонность сына к математике взяла верх. Эйлер учился в гимназии, в 1720 г. поступил на философский факультет Базельского университета, где кафедру математики занимал И. Бернулли. Эйлер стал слушать его лекции. Бернулли обратил внимание на чрезвычайно одаренного юношу и посоветовал ему изучать труды математиков. Для бесед о прочитанном Эйлер должен был каждую субботу приходить к Бернулли домой. Здесь Эйлер познакомился с сыновьями Иоганна — Николаем и

Даниилом; возникшая дружба сыграла большую роль в судьбе Эйлера.

Философский факультет Эйлер закончил в 1722 г. в возрасте 15 лет. Затем поступил на богословский факультет, где с особым усердием изучал древние языки. Петербургский академик Н. Фусс (1755—1825) впоследствии отмечал, что Эйлер прочитал многих римских классиков и знал и помнил деяния всех времен и народов. Память Эйлера была такова, что он помнил, например, всю «Энеиду», мог прочесть ее наизусть, воспроизвести первый и последний стихи на каждой странице книги, по которой учил «Энеиду».

Летом 1824 г. Эйлер перед преподавателями и слушателями университета произнес на латинском языке речь о сравнении философии Декарта и Ньютона и получил степень магистра искусств. После окончания университета он принял участие в конкурсе на вакансию профессора кафедры физики. Процедура состояла в следующем. Соискатели представляли исследование; комиссия отбирала трех наиболее достойных кандидатов, которые затем бросали жребий. Эйлер представил диссертацию «О природе и распространении звука», но его даже не включили в число трех претендентов (предполагается, что решающим фактором для отказа была молодость Эйлера). Швейцарский биограф Эйлера О. Шипе писал, что отказ обернулся благом для Эйлера, ибо перед ним открывалась более широкая перспектива в связи с наметившейся возможностью поездки в Петербург.

В 1726 г. Эйлер подал на конкурс Парижской академии наук работу, посвященную условиям наилучшего размещения мачт на корабле. Это была первая из серии работ по судостроению и навигации, составивших впоследствии «Морскую науку».

Уже упоминалось, что дружба с Даниилом и Николаем Бернулли сыграла важную роль в жизни Эйлера. В конце октября 1725 г. братья Бернулли прибыли в Петербург по приглашению президента недавно организованной Петербургской академии наук. Перед отъездом из Швейцарии Д. Бернулли обещал Эйлеру выписать в Петербург и его при наличии соответствующего места. Вскоре Эйлер получил приглашение президента Петербургской академии, посланное Даниилом Бернулли. Он выехал из Базеля 5 апреля 1727 г. и 24 мая прибыл в Петербург. Как и предполагалось, он

стал адъюнктом физиологии, позднее — математики; в январе 1731 г. получил место профессора по физике, а после отъезда из Петербурга Д. Бернулли в 1733 г. занял кафедру математики.

В благоприятных условиях быстро развивающейся Петербургской академии гений Эйлера раскрылся во всю ширь. Исследования по математике и механике принесли ему широкую известность среди научных кругов. Он стал членом Петербургской и Берлинской академий наук, с 1749 г. — иностранным членом Лондонского королевского общества, с 1755 г. — Парижской академии наук.

Характеристику значимости Петербургской академии в своей жизни Эйлер дал в письме Шумахеру 18 ноября 1749 г.: «Что, собственно, до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был главным образом обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество (Фридрих II. — В. Н.) недавно меня спросил, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии».

В декабре 1733 г. Эйлер женился на своей соотечественнице, дочери академического живописца Катарине Гзелль де Сан-Галль. У них выросли три сына и две дочери. Старший сын, Иоганн Альбрехт, математик и астроном, стал членом Берлинской, Петербургской и Парижской академий наук, непременным секретарем Петербургской академии. Второй сын Карл, был придворный врач, также академик. Третий, Христофор, генерал, возглавлял Сестрорецкий оружейный завод.

В 1738 г. Эйлер ослеп на правый глаз, но это не отразилось на его работоспособности, он продолжал проведение разнообразных исследований, печатавшихся в каждом номере «Комментариев Петербургской академии наук».

В 1741 г. Эйлер на 25 лет покинул Петербург. Причина — сложная, неустойчивая политическая обстановка в Петербурге, сложившаяся в связи с регентством Анны Леопольдовны, что отражалось и на работе Академии. В то время Фридрих II решил укрепить основанное по инициативе Лейбница «Научное общество» и пригласил Эйлера в Берлин. Эйлер принял приглашение.

В Берлине Эйлер оставался почетным членом Петербургской академии наук (с постоянной пенсией). Свои работы он помещал в изданиях обеих академий. В то же время он выполнял различные поручения прусского правительства, редактировал математические работы, издаваемые обеими академиями, вел переписку с профессорами немецких университетов и петербургскими академиками, в том числе с М. В. Ломоносовым (1711 — 1765), которого ценил очень высоко, закупал для Петербургской академии книги и приборы, подыскивал для нее сотрудников, руководил работой живших у него молодых русских ученых — математика С. К. Котельникова (1723—1806), астронома С. Я. Румовского (1734—1812), организовывал научные конкурсы обеих академий.

Между тем взаимоотношения Эйлера и Фридриха II все более ухудшались. Когда умер президент Академии Мопертюи, Фридрих предложил Д'Аламберу занять его место; после его отказа поручил Эйлеру руководить Академией, без занятия им президентской должности. Возникшие вслед за этим разногласия привели к полному разрыву между ученым и королем.

Екатерина II предложила Эйлеру вернуться в Петербург²⁸. Это предложение было передано через русского посла, которому было предписано соглашаться на любые условия Эйлера. Эйлер выдвинул следующие требования: пост директора Академии с окладом 3 тысячи рублей в год, на случай его смерти — пенсию жене в размере тысячи рублей, достаточно высокие должности сыновьям, ряд других условий. Посол принял все условия. Эйлер воспользовался своим швейцарским подданством и добился отставки. В 1766 г. он вернулся в Петербург. Уже навсегда.

Жизнь Эйлера в Петербурге протекала среди интенсивных трудов. После того как окончательно ослеп, он диктовал статьи сыновьям и ученикам, а затем выписал из Базеля, при посредничестве Д. Бернулли, Н. Фусса, ставшего секретарем Эйлера и женившегося на его внучке. С 1773 г. по 1783 г. Фусс выпустил 355 работ Эйлера.

Эйлер работал вплоть до последнего дня (18 сентября 1783 г.), когда вечером, во время игры с внуком, почувствовал себя плохо и с возгласом «Я умираю» потерял сознание. Вскоре он скончался и, как сказал Кондорсе, «перестал жить и вычислять». Похоронили

Эйлера 24 сентября на Смоленском евангелическом кладбище. В 1837 г. на могиле Эйлера Петербургской академией был воздвигнут памятник. В 1956 г. прах Эйлера перенесен в Ленинградский некрополь.

В «Истории математики» отмечается одна важная особенность творчества Эйлера: он охотно сообщал другим свои мысли; к нему применимы слова Фонтенеля, сказанные о Лейбнице: «Он любил наблюдать, как расцветают в чужом саду растения, семена которых он сам доставил» [14, с. 38].

Обращаясь к развитию Эйлером интегрального исчисления, следует сразу же подчеркнуть, что с помощью интегрирования он находил соотношения между величинами по известным связям между их дифференциалами. «Интегральное исчисление, — писал он, — есть метод, посредством которого по данному соотношению между дифференциалами количеств находят соотношение между самими количествами, а действие, с помощью которого это достигается, называется интегрированием» [42, 9].

Эйлер интегрировал функции (и дифференциальные уравнения) и получал также функции. И хотя он вычислил много сложнееших определенных интегралов (на-

пример, $\int_0^1 \frac{(x-1) dx}{\ln x} = \ln 2$, $\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2}$), ни о ка-

ких интегральных суммах у него не было и речи. Определенные интегралы ²⁹ он получал как разности значений первообразных. Эйлер отвергал определение интеграла как «суммы» бесконечного числа дифференциалов, поскольку считал дифференциал нулем, сумма же нулей должна дать только нуль. Однако в работе 1775 г. он привел основные свойства определенно-

го интеграла типа $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ и говорил о «пределе, от которого», и «пределе, до которого». В статье 1776 г. ввел обозначение $\int Pdx \left[\begin{smallmatrix} ab \\ ad \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} x=a \\ x=b \end{smallmatrix} \right]$, что соответствует $\int_b^a Pdx$.

Приступая к осуществлению грандиозного плана создания полного курса современного анализа, Эйлер писал 4 июля 1744 г. Х. Гольдбаху (1690—1764): «Когда

я составил себе план полного трактата об анализе бесконечно малых, я заметил, что для изучения разбираемых в нем вопросов необходимо знание очень многих вещей, которые, собственно говоря, не относятся к анализу и нигде еще не разработаны». Эти «многие вещи» и составили двухтомное «Введение в анализ бесконечно малых». Не будем обсуждать содержание его, укажем лишь вопросы, насущно необходимые в интегральном исчислении.

Центральное положение во «Введении» занимает понятие функции. Эйлер писал: «Учение о функциях особенно обстоятельно изложено в первой книге, так как весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций». В определении функции он следовал И. Бернулли: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». В предисловии к «Дифференциальному исчислению» Эйлер дал иное определение функции: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других». Символа $f(x)$ или заменяющего его он не употреблял; он пользовался обозначениями многих элементарных функций (например, $\sin x$, $\cos x$).

При интегрировании рациональных дробей еще Лейбниц и И. Бернулли представляли их в виде суммы простейших. Эйлер во «Введении» дал систематическое и обоснованное изложение этого вопроса. Вот один пример. Поставлена задача: «Требуется показать, каким образом, зная простой множитель знаменателя N , найти соответствующую простую дробь». И вот ее решение. Пусть дана рациональная дробь M/N и известно, что $N = (p - qz) S$, где S — целая функция z . Необходимо найти числитель A простейшей дроби $A/(p - qz)$. Представим $M/N = A/(p - qz) + P/S$; отсюда $P/S = (M - AS)/(p - qz) S$. Поскольку S целая функция, разность $M - AS$ должна делиться на $p - qz$ при любом z , в том числе и при $z = p/q$, т. е. когда $p - qz = 0$. Но $p - qz$ — делитель $M - AS$, поэтому и $M - AS = 0$, откуда $A = M/S$.

Во «Введении» Эйлер привел известные «подстанов-

ки Эйлера», рационализирующие иррациональности. В качестве примера отметим подстановку, изложенную в № 51: «Пусть $y = \sqrt{p + qz + rz^2}$, требуется найти удобную подстановку так, чтобы выражение для y стало рациональным». Решение строится так. Положим $y = \sqrt{a^2 + bz + cz^2}$ и $\sqrt{a^2 + bz + cz^2} = a + xz$. Отсюда $b + cz = 2ax + x^2z$, $z = (b - 2ax)/(x^2 - c)$, а поскольку $y = a + xz$, будет $y = (bx - ax^2 - ac)/(x^2 - c)$.

Со времен Ньютона в практику интегрирования вошел прием разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования его. Эйлер во «Введении» уделил значительное место теории рядов, которые служили ему действенным аппаратом для исследования функций.

Не останавливаясь на «Дифференциальном исчислении» Эйлера, сыгравшем важную роль в становлении анализа, обратимся к «Интегральному исчислению». В нем, как уже говорилось, содержится интегрирование функций и дифференциальных уравнений. В первом томе (около 400 страниц) половина объема отведена интегрированию функций, остальное — интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка. Второй том (около 360 страниц) содержит изложение методов интегрирования уравнений второго и высших порядков. Третий том посвящен интегрированию уравнений в частных производных. Почти все содержание «Интегрального исчисления» — методы и результаты, принадлежащие Эйлеру.

Открывает первый том приведенное выше определение интегрального исчисления. Совершенно в духе И. Бернулли сформулировано определение 2: «Поскольку дифференциал какой-либо функции от x имеет вид Xdx , пусть теперь предложено такое дифференциальное выражение Xdx , в котором X есть какая-либо функция от x ; тогда та функция, дифференциал которой $= Xdx$, называется его интегралом и обозначается \int , поставленным спереди³⁰, так что $\int Xdx$ означает то переменное количество, дифференциал которого $= Xdx$ ». И далее, в § 46: «Так как дифференциал степени x^m равен $mx^{m-1}dx$, то и обратно $\int mx^{m-1}dx = m \int x^{m-1}dx = x^m$. Пусть $m - 1 = n$, т. е. $m = n + 1$; тогда $\int x^n dx = x^{n+1}/(n + 1)$ и $a \int x^n dx = ax^{n+1}/(n + 1)$. Следовательно, полный интеграл (т. е. неопределенный интеграл.— В. Н.) предложенного дифференциального вы-

ражения $ax^n dx$ будет $ax^{n+1}/(n+1) + C$. Убедиться в этом Эйлер предлагает дифференцированием и оговаривает случай $n = -1$.

В первой главе первого тома (мы будем интересоваться только им по разумеющейся причине) изложено интегрирование рациональных функций. Представление рациональных дробей в виде суммы простейших было подробно обсуждено Эйлером во «Введении», поэтому вопрос интегрирования их получил достаточно полное освещение. Эйлер писал: «Нам удалось разработать эту главу так, что в этом круге вопросов не остается желать ничего большего». И это верно: после Эйлера здесь ничего существенного сделать не было.

Вторая глава посвящена интегрированию иррациональностей. Известно, что многие интегралы от выражений, содержащих квадратный корень из квадратного трехчлена, вычислены Ньютоном и его последователем Р. Коутсом (1682—1716). Эйлер в случае интегралов вида $\int R(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$ дал свои подстановки, приводящие иррациональные дифференциалы к рациональным. Затем он показал, что и интегралы

$$\int R \left[x, \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{\frac{r}{s}}, \right. \\ \left. \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{\frac{t}{u}}, \dots \right] dx$$

определенными подстановками сводятся к интегралам от рациональных функций.

Следующий раздел — интегрирование биномиальных дифференциалов, т. е. вычисление интегралов вида $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, где m, n, p — рациональные числа. Эйлер указал условия рационализации их: хотя бы одно из чисел $p, (m+1)/n, (m+1)/n + p$ — целое. Он высказал утверждение, что других случаев, допускающих рационализацию, нет. Для рациональных m, n и p это было доказано в 1853 г. П. Л. Чебышевым (1821—1894), а для иррациональных показателей — в 1926 г. Д. Д. Мордухай-Болтовским (1876—1952). В той же главе рассмотрены интегралы от иррациональных дифференциалов, приводящиеся к более простым.

Как и некоторые предшественники, Эйлер видел, что интегрирование связано с появлением новых транс-

цендентных функций. Он писал: «Так, если Xdx будет таким дифференциальным выражением, которое никак не может быть приведено к рациональному виду, то его интеграл $\int Xdx$ придется отнести к новому роду трансцендентных функций, и нам не остается ничего другого, как попытаться найти его значение, сколь угодно близкое к истине. Но, допустив существование нового рода трансцендентных количеств, мы сможем свести к нему интегрирование бесчисленных других выражений» [42, с. 53].

В третьей главе Эйлер рассмотрел интегрирование дифференциальных выражений с помощью рядов. Следующая глава содержит интегрирование трансцендентных функций. Начинается она с вычисления интегралов $\int F(x) \ln[f(x)] dx$, когда функции F и f — алгебраические. Основной прием — интегрирование по частям; Эйлер обратил внимание на случаи применимости этого приема.

Новая трансцендентная функция, нашедшая в математике широкое применение, появилась при изучении интеграла $\int x^m (\ln x)^{-n} dx$. По формулам приведения Эйлер свел его к $\int x^m (\ln x)^{-1} dx$, а затем подстановкой $x^{m+1} = z$ — к $\int dz/\ln z$. Он отметил: «Если бы можно было найти этот интеграл, то он принес бы огромную пользу в анализе, но никакими средствами его до сих пор не удалось выразить ни через логарифмы, ни через углы... По-видимому, это выражение $\int dz/\ln z$ представляет особый вид трансцендентных функций, который безусловно заслуживает весьма тщательного изучения» [42, с. 111]. Подстановкой $z = e^x$ Эйлер преобразовал интеграл к $\int e^x dx/x$ и с помощью разложения в ряд и почленного интегрирования получил

$$\int e^x dx/x = C + \ln x + x/1 \cdot 1! + x^2/2 \cdot 2! + x^3/3 \cdot 3! + \dots$$

Тогда

$$\int dz/\ln z = C + \ln(\ln z) + \ln z/1 \cdot 1! + (\ln z)^2/2 \cdot 2! + (\ln z)^3/3 \cdot 3! + \dots$$

Здесь C — постоянная Эйлера, введенная им в «Дифференциальном исчислении». Функция $\int dz/\ln z$ называется интегральным логарифмом.

После этого Эйлер рассмотрел интегралы $\int f(x) a^x dx$, а также с помощью разложения в ряды проинтегрировал функции x^{nx} , $x^{nx} x^m$.

В пятой главе даны способы интегрирования обратных тригонометрических и тригонометрических функций — вычислены интегралы $\int (\arcsin x)^m F(x) dx$, $\int (\arccos x)^m F(x) dx$, $\int (\operatorname{arctg} x)^m F(x) dx$ (F — алгебраическая функция), $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $\int \frac{\sin^m x dx}{\cos^n x}$, $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, $\int \frac{(\alpha + \beta \cos x) dx}{(a + b \cos x)^n}$, $\int e^{ax} \sin^n x dx$, $\int e^{ax} \cos^n x dx$. Для некоторых из них указаны формулы приведения.

На этом заканчивается интегрирование функций в конечном виде. Много это или мало? Послушаем классиков. П. Н. Лузин (1883—1950) писал: «Математики в течение 150 лет после Эйлера не смогли пробить бреши в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером». Такую же оценку дал работе Эйлера А. Н. Крылов (1863—1945).

Но, кроме интегрирования дифференциальных уравнений, которое также имеет прямое отношение к нашей книге, в «Интегральном исчислении» Эйлер осветил еще два вопроса, непосредственно связанных с интегрированием. В седьмой главе — «Общий метод приближенного нахождения каких угодно интегралов» — он решил задачу: «отыскать с любой точностью значение какого угодно интегрального выражения $y = \int X dx$ », т. е. вычислить интеграл $y = \int X dx$ при некотором значении $x \neq a$, если известно, что при $x = a$ будет $y = b$.

Решение выглядит так. Дадим аргументу x значение $a + \alpha$, где α — «величина весьма малая». Функцию X можно считать постоянной, тогда $y = Xx + \text{const}$, $\text{const} + Xa = b$, $\text{const} = b - Xa$ и $y = b + X(x - a)$. Будем теперь придавать x значения a' , a'' , ..., незначительно отличающиеся друг от друга, и обозначим $X(a) = A$, $X(a') = A'$, ..., $y(a) = b$, $y(a') = b'$, ... Продолжая рассуждения, получим

$$y(a') = b' + A(a' - a),$$

$$y(a'') = b'' = b' + A'(a'' - a') \text{ и т. д., т. е.}$$

$$b' = b + A(a' - a),$$

$$b'' = b + A (a' - a) + A' (a'' - a'),$$

.....

$$y = b + A (a' - a) + A' (a'' - a') + \dots + 'X (x - 'x).$$

где $'x$ — предпоследнее значение аргумента, $'X$ — предпоследнее значение X . Иными словами,

$$y = y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots \\ \dots + f(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Пусть теперь приращения x одинаковы, $\Delta x = \alpha$, тогда будет

$$y = b + \alpha (A + A' + \dots + X),$$

$$y = y_0 + \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})].$$

Эйлер записал приближенное равенство $y = \int X dx = b + S\alpha$, где $S = f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})$.

Он указал, что равенство тем точнее, чем меньше разности между соседними значениями x . Все это означает, что Эйлер выразил интеграл приближенно с помощью суммы, которую мы теперь называем интегральной; при этом значения подынтегральной функции он брал в левых концах интервалов.

Вслед за этим шли пояснения, уточнения, примеры. В «Пояснении 1» Эйлер писал: «Интегрирование обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений выражения Xdx , если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения, начиная от некоторого данного значения вплоть до x ; разность же эту нужно считать бесконечно малой. Таким образом, этот способ представления интегрирования подобен тому, согласно которому в геометрии линии мыслятся как совокупности бесчисленных точек... Из изложенного же метода во всяком случае ясно, что интегрирование можно получить из суммирования с любой точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями. Из этого источника возникли как наименование «интегрирование», которое называют также «суммированием», так и знак интеграла \int . Коль скоро суть дела выяснена, их вполне можно сохранить» [42, с. 163].

Эйлер указал, что значение интеграла будет точнее, если брать его между двумя суммами

$$b + A (a' - a) + \dots + 'X (x - 'x),$$

$$b + A' (a' - a) + \dots + X (x - 'x),$$

т. е. в случае возрастающей $f(x)_x$:

$$y_0 + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) < \int_a^x f(x) dx < y_0 + \\ + \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Далее он дал примеры реализации способа приближенного вычисления интегралов.

И еще один вопрос, относящийся непосредственно к понятию интеграла, рассмотрен Эйлером в «Интегральном исчислении». В шестой главе второй части первого тома он исследовал дифференциальное уравнение $dx/\sqrt{P(x)} = dy/\sqrt{P(y)}$ (P — многочлен четвертой степени), приводящее к эллиптическим интегралам. Теория эллиптических интегралов интересовала Эйлера и в дальнейшем.

Петербургская академия наук издавала «Интегральное исчисление» четыре раза: в 1768—1770 гг., в 1792—1793 гг., в 1824—1827 гг., в 1895 г. (только третий том).

Уместно заметить, что, как Ньютон и Лейбниц, Эйлер нигде не писал формулу Ньютона — Лейбница. Сумму интеграла с произвольной постоянной он называл полным интегралом, а с некоторой фиксированной постоянной — частным. Значение частного интеграла при какой-либо величине аргумента давало определенный интеграл. Таким образом, определенный интеграл не имел самостоятельного статуса, а выступал как некоторое значение частного интеграла.

При изучении рядов Эйлер стал выражать общие члены их в виде интегралов. На этом пути он пришел к играющим важную роль в математике интегралам, названным в честь его эйлеровыми:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx,$$

$a, b > 0$. Интеграл $B(a, b)$ называют также бета-функцией, а $\Gamma(a)$ — гамма-функцией.

В задачах теории рядов, математической физики, теории вероятностей возникали специальные интегралы, в том числе и несобственные. Эйлер вычислил многие такие интегралы. В тех случаях, когда не удавалось

выразить их через элементарные функции, он прибегал к разложению подынтегральных функций в ряды, дифференцированию и интегрированию по параметру, другим методам.

В 1776 г. Эйлер разработал метод вычисления определенных интегралов с помощью комплексной переменной, нашедший развитие в работах Лапласа, Пуассона, Коши. Суть его состоит в следующем. Пусть известен интеграл $\int Z dz = V(z)$. Положим $z = x + iy$, и пусть $Z(z) = M(x, y) + iN(x, y)$, $V(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Тогда $P + iQ = \int (M + iN)(dx + idy) = \int Mdx - Ndy + i \int Ndx + Mdy$.

Отсюда

$$P = \int Mdx - Ndy, \quad Q = \int Ndx + Mdy.$$

Вот как выглядит вычисление интегралов Френеля этим способом. Известен интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Сделаем замену $x = (1 + i)y/\sqrt{2}$, $dx = (1 + i)dy/\sqrt{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy^2} dy = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos y^2 - \\ &\quad - i \sin y^2) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos y^2 dy + \sin y^2 dy + \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos y^2 dy - \sin y^2 dy, \\ \sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos y^2 dy + \sin y^2 dy, \quad 0 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos y^2 dy - \sin y^2 dy. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos y^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin y^2 dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

В статье «О двойных интегралах» (1768 г.) Эйлер дал основы теории двойных интегралов. Он применил их к вычислению объемов и поверхностей.

Творчество Коши и Римана протекало тогда, когда в общественной жизни, естествознании и математике произошли существенные изменения. Возросла роль математики в системе наук. В связи с тем, что она приобрела аналитический характер, математические методы проникали не только в механику, с которой математика была в тесном контакте еще во времена Архимеда, но и физику, технику и экономику. Анализ стал ведущей отраслью знаний. В предисловии к «Аналитической механике» Лагранж писал: «В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни их построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовлетворением убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения». Л. Карно (1753—1823) в «Размышлениях о метафизике изчисления бесконечно малых» отметил: «Ни одно другое открытие не доставило более простых и более действенных средств для проникновения в познание законов природы». Ж. Фурье (1768—1830) в «Аналитической природе тепла» утверждал: «Математический анализ столь же обширен, как и сама природа; он определяет все чувственные отношения, измеряет времена, пространства, силы, температуры». Лаплас высказал убеждение, что с помощью дифференциальных уравнений можно описать весь окружающий нас материальный мир.

Расширилась сеть учебных заведений, готовящих специалистов, стало больше университетов, высших технических школ; профессора университетов стали заниматься научными исследованиями, академики — преподавать в университетах. Увеличилось количество периодических научных изданий, что предоставило более широкую возможность публикации работ, улучшило информативность.

С развитием математики появилась тенденция к специализации, и она стала подразделяться на чистую и прикладную. Чистая математика стала более абстракт-

ной. Это вело к совершенствованию основных понятий ее, таких, как функция, предел, к разрешению на более высоком уровне проблемы обоснования анализа. От анализа отделялись теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, теория специальных функций, теория рядов, теория функций комплексного переменного. Прикладная математика все глубже вторгалась в технику, гидромеханику, теорию машин и механизмов.

2

Если бросить беглый взгляд на развитие идеи интеграла, то вырисовывается следующая картина. В творчестве Архимеда прослеживается зарождение концепции интегрирования при вычислении площадей криволинейных фигур посредством суммирования площадей «заполняющих» эти фигуры многоугольников. Она развивалась Кеплером, Кавальери и многими упомянутыми в этой книге и не упомянутыми математиками, вплоть до Лейбница и братьев Бернулли. Тем же путем решались задачи вычисления объемов, длин дуг, моментов инерции, статических моментов, отыскания координат центров тяжести. В ходе совершенствования разработанных методов возникли трудности в нахождении пределов некоторых сумм. Трудности удалось преодолеть при рассмотрении обратных задач на касательные; Барроу, а затем Ньютон установили взаимную обратность задач квадрирования кривой и проведения касательной к ней, интегрирования и дифференцирования. Последовавшее открытие формул дифференцирования многих функций и методов интегрирования привело к установлению неопределенного интеграла как основного понятия. Особенно это проявилось в «Интегральном исчислении» Эйлера.

Однако вновь возникшие потребности как внутри математики, так и в других науках, а также связанные с вычислением некоторых первообразных трудности принципиального характера выдвигали на первый план определенный интеграл. Задачи теории вероятностей, теории рядов, интегрирования дифференциальных уравнений, математической физики, теории конечных разностей приводили к специального вида определенным интегралам, в том числе несобственным. Примером та-

ких интегралов служит интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Вычислением таких интегралов занимались многие видные математики. У Эйлера этим вопросам отведены целиком два тома. Исследованию специальных интегралов посвятили свои труды Лагранж, Лаплас, Пуассон, Коши. Определенный интеграл как предел суммы некоторых количеств становился неизменным в многомерном интегрировании и применении его к задачам математической физики.

Но это не все. Вычисление некоторых интегралов по формуле Ньютона — Лейбница $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, которой практически пользовались математики, таило в себе иногда парадоксы. Первым обратил на это внимание Д'Аламбер в 1768 г., когда при решении одного дифференциального уравнения для определения скорости тела получил выражение $u^2 = 2/(a - x) - 2/a$ ($a > 0$), дающее при $x > a$ мнимое значение скорости, чего по условиям задачи не могло быть. Он также заметил, что формулой Ньютона — Лейбница нельзя пользоваться при вычислении интегралов вида $\int_a^b \frac{dx}{x^m}$, когда подынтегральная функция в промежутке интегрирования обращается в бесконечность. Аналогичное рассмотрение произвел в 1804 г. Лагранж.

В мемуаре 1820 г. С. Д. Пуассон (1781—1842) также изучал интегралы, когда подынтегральная функция обращается в бесконечность. Он указал, что интегралы $\int_{-1}^1 dx/x^m$ при четных m отрицательны, хотя подынтегральная функция положительна. Кроме того, отметил, что $\int_{-1}^1 dx/x = \ln(-1)$, т. е. $(2n + 1)\pi i$ (это уже из теории функций комплексного переменного) — бесконечному числу комплексных величин. В качестве выхода он, так же как и Гаусс, предложил пользоваться комплексными переменными.

Вопросы существования интегралов в творчестве Коши впервые обсуждались в его мемуаре 1814 г.,

в котором были отмечены парадоксальные свойства некоторых двойных интегралов. Например:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(x^2 - z^2) dx dz}{(x^2 + z^2)^2} = \int_0^1 \frac{z}{x^2 + z^2} \Big|_0^1 dx = \pi/4,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(x^2 - z^2) dx dz}{(x^2 + z^2)^2} = \int_0^1 \frac{-x}{x^2 + z^2} \Big|_0^1 dz = -\pi/4.$$

Коши стал рассматривать двойные интегралы как «суммы элементов, соответствующих различным значениям двух переменных». Парадоксальные свойства, обнаруженные у двойных интегралов, Коши перенес и на определенные интегралы. Например, $\int_{-2}^4 dx/x$.

Таким образом, развитие математики выдвигало настоятельную необходимость пересмотра концепции интеграла, и это было выполнено Коши.

3

Огюстен Луи Коши родился 21 августа 1789 г. в Париже в семье видного чиновника. Его отец был ревностный католик и роялист. Вначале с Коши занимался отец, прекрасный лингвист, а в 1805 г. Огюстен поступил в Политехническую школу, затем в 1807 г. — в Школу мостов и дорог, которую и окончил в 1810 г. Лагранж отметил выдающиеся математические способности юноши и предсказал ему блестящую будущность. После окончания инженерной школы Коши получил ответственное поручение по постройке военного порта в Шербуре. Здесь в 1811 г. он написал свой первый мемуар о многогранниках, где разрешил некоторые вопросы, не поддававшиеся усилиям первоклассных математиков. Затем последовали еще мемуары — по теории многогранников, о симметрических функциях, алгебраических уравнениях, по теории чисел. В 1816 г. Коши представил на конкурс Парижской академии наук знаменитое исследование по теории волн на поверхности тяжелой жидкости и получил премию. В этом же году Коши был назначен правительством членом Института Франции¹ на место исключенного Г. Монжа (1746—1818).

Тогда же началась интенсивная преподавательская деятельность Коши: с 1816 г. он профессор Политехнической школы, в 1816—1830 гг. — Сорбонны, в 1848—1857 гг. — Коллеж де Франс. Им написаны «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций, прочитанных в Королевской политехнической школе» (1823), «Лекции о приложении анализа к геометрии» (1826—1828). В этих курсах Коши дал определение непрерывности функции, построил строгую теорию сходящихся рядов, ввел определенный интеграл как предел интегральных сумм², рассмотрел и другие вопросы анализа. Вся система построена на базе понятия предела. Книги Коши долгое время служили образцом для курсов анализа. В 1831 г. в Петербурге издано «Краткое изложение дифференциального и интегрального исчисления» Коши в переводе В. Я. Буняковского (1804—1889).

Революция 1830 г. и изгнание Карла X резко изменили судьбу Коши: не считая возможным изменить присяге Карлу X, он отказался присягнуть правительству Луи Филиппа, потерял должности и вынужден был покинуть Францию. Некоторое время он провел в Швейцарии, затем получил место в Туринском университете на кафедре математической физики. Карл X, поселившийся в Праге, пригласил Коши в 1832 г. в качестве учителя и воспитателя сына. Коши несколько лет путешествовал с ним по Европе. Так было до 1838 г.

Коши предлагали различные должности, но он отказывался от них, руководствуясь своими католическими и роялистскими убеждениями. Во Францию и в Институт он вернулся в 1838 г. Революция 1848 г. отменила присягу, и Коши получил кафедру математики в Коллеж де Франс, где и проработал до самой смерти. Умер Коши 22 мая 1857 г.

Коши сделал первостепенные открытия в анализе, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, теории рядов³, теории чисел, математической физике, теории упругости, теоретической механике, небесной механике, гидродинамике, оптике. Работоспособность Коши поразительна: иногда он каждую неделю представлял Академии новый мемуар. Всего Коши написал около 700 работ, не считая сочинений политического и религиозного содержания. Он был членом почти всех академий наук.

Определенный интеграл введен Коши в 21-й лекции «Резюме...». В предисловии он писал: «В интегральном

исчислении мне представилось необходимым доказать общим образом существование *интегралов*, или *первообразных функций*, прежде чем знакомить с их различными свойствами. Чтобы достигнуть этого, потребовалось сперва установить понятие интегралов, *взятых между данными пределами*, или *определенных интегралов*».

Коши строил определенный интеграл так. Для непрерывной на отрезке $[x_0, X]$ функции $f(x)$ он составлял сумму

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

разбивая отрезок $[x_0, X]$ на части точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Затем доказал, что независимо от способа разбиения отрезка $[x_0, X]$ при условиях, что n увеличивается неограниченно и все разности $x_i - x_{i-1}$ стремятся к нулю, «значение станет в конце концов чувствительно постоянным или, другими словами, в конце концов достигнет известного предела, который будет зависеть только от функции $f(x)$ и крайних значений x_0, X , приписанных переменной x . Этот предел и есть то, что называют *определенным интегралом*».

Уже в следующей лекции Коши указал, что значения $f(x)$ можно брать не обязательно в левых концах интервалов разбиения, а в любых точках их. Это не изменит предела суммы S , т. е. определенного интеграла.

Исходя из определения интеграла и непрерывности функций Коши доказал следующие свойства определенных интегралов:

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$2) \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx,$$

$$3) \int_a^b f(x \pm \alpha) dx = \int_{a \pm \alpha}^{b \pm \alpha} f(x) dx,$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = (b - a) f[a + \theta(b - a)], \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$5) \int_a^b \left(\sum c_i f_i(x) \right) dx = \sum c_i \int_a^b f_i(x) dx,$$

$$6) \int_a^b f(x) dx = \sum_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx, \quad a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots \\ \dots < \alpha_n = b,$$

$$7) \text{ когда функция } \varphi(x) \text{ сохраняет знак на } [a, b], \text{ будет} \\ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(\xi) \int_a^b \psi(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Неопределенный интеграл Коши ввел как частный случай определенного, при переменном верхнем пределе. Он доказал непрерывность такого интеграла по верхнему пределу и теорему о том, что производная его по верхнему пределу равна подынтегральной функции. Коши доказал также справедливость формулы Ньютона — Лейбница. Он высказал положения, связанные с дифференцированием и интегрированием по параметру.

Нетрудно заметить, что некоторые из указанных свойств применялись математиками ранее. Так, свойства 2), 5), 6), а также теорема о почленном интегрировании рядов были в употреблении с самого открытия интегрального исчисления. Свойство 6) доказал Эйлер, пользуясь геометрической наглядностью. Он же применял прием дифференцирования и интегрирования по параметру. Формулу Ньютона — Лейбница обосновали Лакруа и Пуассон.

Все это так. Но дело в том, что Коши сформулировал и доказал их для широкого класса непрерывных функций. И построил систему.

Две лекции Коши посвятил несобственным интегралам. Если один или оба предела интеграла бесконечны, то сумму S составить нельзя. То же самое будет в случае, когда подынтегральная функция на промежутке интегрирования обращается в бесконечность. Необходимо было дать другое определение интеграла, что и сделал Коши. Если $f(x)$ ограничена всюду на промежутке интегрирования, но становится неограниченной в одном или обоих концах его, то интеграл определяется формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\xi_1 \rightarrow a \\ \xi_2 \rightarrow b}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) dx$$

при условии существования этого предела. Для бесконечных пределов интегрирования интеграл определя-

ется той же формулой, только $a \rightarrow -\infty$, или $b \rightarrow \infty$, или же $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow \infty$. Разумеется, к таким интегралам применимо свойство б), поэтому, когда точки разрыва находятся внутри промежутка интегрирования, интеграл представляется в виде суммы нескольких несобственных интегралов.

Пусть, скажем, $f(x)$ будет неограниченной в точке ξ , $a < \xi < b$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_a^{\xi - \varepsilon_1} f(x) dx + \int_{\xi + \varepsilon_2}^b f(x) dx \right),$$

причем ε_1 и ε_2 могут стремиться к нулю независимо. Коши назвал главным значением интеграла указанный предел при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{\xi - \varepsilon} f(x) dx + \int_{\xi + \varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

При неограниченном промежутке интегрирования главным значением называется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x) dx.$$

Как видим, данное Коши определение несобственных интегралов без существенных изменений дошло до наших дней.

4

Кажется, совсем немного времени прошло после введения Коши определенного интеграла, но опять возникают мотивы, вынуждающие пересматривать, уточнять это понятие, и опять настойчиво работает ум математиков. И поставить последнюю точку в нашем повествовании о «приключениях» идеи интеграла выпало на долю Римана. Только не следует думать, что развитие понятия интеграла закончилось с работами Римана. Его творчеством завершился путь к интегралу и начался путь интеграла, не менее интересный и существенный для науки.

Георг Фридрих Бернхард Рيمان родился 17 сентября 1826 г. в семье лютеранского пастора Фридриха

Берихарда Римана. Его родина — деревня Брезеленц близ города Даниенберг королевства Ганновер.

В шесть лет Берихард под руководством отца решал арифметические задачи. Когда ему исполнилось десять лет, с ним стал заниматься учитель, но ученик вскоре превзошел учителя. В возрасте четырнадцати лет Берихард поступил сразу в третий класс гимназии в Ганновере, через два года перешел в гимназию Лüneбурга, в которой учился до девятнадцати лет. Директор гимназии, обнаружив у Римана математические способности, разрешил пользоваться своей библиотекой. Однажды юноша изучил за шесть дней книгу Лежандра по теории чисел, содержащую около 900 страниц.

В 1846 г. Риман поступил на богословский факультет Гёттингенского университета. Но тяга к математике взяла верх, и он испросил разрешение отца перейти на философский факультет, на котором астроном Гольдшмидт читал теорию земного магнетизма, математик М. Штерн — курс численных методов и определенных интегралов, Гаусс — метод наименьших квадратов.

Через год после поступления в Гёттингенский университет Риман перешел в Берлинский университет, где слушал лекции Н. Г. Дирихле (1805—1859), Я. Штейнера (1796—1863), К. Якоби, Ф. М. Эйзенштейна ⁴. На Римана оказали большое влияние лекции Дирихле. Ф. Клейн писал: «К Дирихле Риман чувствовал внутреннюю симпатию, обусловленную манерой их мышления. Дирихле любил уяснять себе теорему на какой-либо наглядной схеме и по возможности избегал длинных выкладок. Его приемы нравились Риману, и Риман широко ими пользовался» ⁵.

В 1849 г. Риман вернулся в Гёттингенский университет, стал слушать лекции В. Вебера, полтора года был ассистентом в его лаборатории, участвовал в организованном в 1850 г. физико-математическом семинаре, одним из руководителей которого был Вебер.

В конце декабря 1851 г. Риман получил степень доктора за диссертацию «Основы теории функций комплексного переменного».

Риман в 1853 г. подал в Совет университета сочинение «О представлении функций тригонометрическими рядами», напечатано оно после смерти Римана, в 1867 г., в трудах Гёттингенского общества наук.

Риман наметил и подготовил три темы для доклада Совету; по предложению Гаусса была принята геометри-

ческая, и 10 июня 1854 г. Риман сделал доклад «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», оставивший сильное впечатление у Гаусса.

Идеи Римана, определяющие новые направления в науке, воспринимались коллегами и руководством университета без достаточного понимания, и лишь в 1857 г. сменившему умершего в 1855 г. Гаусса Дирихле с большим трудом удалось получить для Римана место экстраординарного профессора.

В 1857 г. Риман издал мемуар «Теория абелевых функций», включающий его исследования с 1851 г., изложенные в лекциях в 1855—1856 гг. Ф. Клейн рассказал, что тогда же К. Вейерштрасс (1815—1897) направил Берлинской академии наук мемуар на ту же тему и взял его обратно, узнав о том, что работа Римана опубликована в журнале Крелля⁶. Вейерштрасс так и не опубликовал своего мемуара. Вскоре он обнаружил пробел в работе Римана, что снижало ее ценность. Деловая критика Вейерштрасса и издевательское выступление в печати печально известного профессора философии Гёттингенского университета Е. Дюринга с критикой геометрии Римана сильно повредили его авторитету среди учебного мира. Надо сказать, что пробел в рассуждениях Римана по указанию Вейерштрасса устранил Г. Шварц.

После смерти Дирихле, наступившей 5 мая 1859 г., 30 июня Римана избрали ординарным профессором; он занял кафедру, возглавляемую до него Гауссом и Дирихле.

Последней работой Римана по математике было исследование «О числе простых чисел, не превышающих данной величины». Затем Риман обратился к задачам математической физики. Особый интерес представляет работа «О движении жидкого однородного эллипсоида». Она была вызвана тем, что среди ученых шел спор о форме Земли. Ньютон выдвинул гипотезу о том, что Земля не шар, а сплюснута у полюсов. С противоположным мнением выступил астроном Ж. Кассини (1677—1756), считавший Землю сплюснутой у экватора. Для проверки гипотезы Ньютона была организована экспедиция в Лапландию под руководством А. Клеро (1713—1765) и Мопертюи. По поводу результатов экспедиции Вольтер писал:

И подтвердили вы среди пустынь теперь

Лишь то, что Ньютон знал, не выходя за дверь.

Вопросами, связанными с движением вращающихся жидких масс, интенсивно занимались впоследствии А. М. Ляпунов (1857—1918) и А. Пуанкаре.

В 1859 и 1860 гг. Риман совершил поездки в Берлин и Париж и познакомился с ведущими математиками: Э. Куммером, К. Вейерштрассом, Л. Кренекером, Ж. Бертраном и другими.

В июле 1862 г. Риман женился на Элизе Кох. Осенью того же года он простудился; простуда вызвала обострение туберкулеза. С тех пор Риман находился в Италии, изредка возвращался в Гёттинген, но не возобновлял работу в университете. В. Вебер и С. Вальтергаузен трижды добивались правительственных субсидий на лечение Римана.

Когда болезнь позволяла, Риман продолжал работать. Последняя его работа была «Механизм уха», напечатанная посмертно, с редакционным примечанием: «Выдающийся математик, которого ранняя смерть отняла у нашей школы и науки, в последние месяцы своей жизни занимался под влиянием учения Гельмгольца о звуковых ощущениях теорией слуха».

Перед смертью Риман жил в деревне Селаска на озере Лаго Маджоре вместе с женой и трехлетней дочкой. «Его силы падали быстро,— писал Дедекиндр,— и он сам почувствовал приближение кончины. Но еще за день до смерти он работал над своим последним, оставшимся, к сожалению, не оконченным сочинением»⁷. Умер Риман 20 июля 1866 г. Ему не исполнилось и 40 лет.

За свою короткую жизнь в науке (всего 15 лет) Риман выполнил основополагающие исследования по теории аналитических функций, геометрии, топологии, теории чисел, аналитической теории дифференциальных уравнений, тригонометрическим рядам, теории интеграла. Его работы стали началом многих последующих плодотворных исследований. Имя Римана навечно вошло в математику: риманова геометрия, римановы пространства, риманова поверхность, риманова кривизна, дзета-функция Римана, условия Коши—Римана, интеграл Римана, теорема Римана—Роха, лемма Римана—Лебега и др.

Риман был членом Берлинской, Парижской, Петербургской академий наук, Лондонского королевского общества (избран за месяц до смерти), членом других академий и научных обществ.

Р. Дедекинд и Г. Вебер (1842—1913) подготовили и издали в 1876 г. сочинения Римана; этим они оказали неоценимую услугу математике. Ф. Клейн сказал: «Никто другой не оказал более решительного влияния на современную математику, чем Риман».

Как видно из предыдущего, разные причины побуждали математиков заниматься интегралом. Для Римана таким источником были тригонометрические ряды: определенный интеграл появился у него при решении задачи о разложении произвольной функции в тригонометрический ряд.

Тригонометрические ряды вошли в математику в XVIII в. в связи с задачами о движении планет и решением дифференциального уравнения колебаний струны. Возник знаменитый спор между Д'Аламбером, Эйлером, Д. Бернулли и Лагранжем о природе функций, представимых тригонометрическим рядом. В 1822 г. в «Аналитической теории тепла» Фурье привел тригонометрический ряд с коэффициентами, отыскиваемыми по формулам, получившим его имя (они были известны Клеро и Эйлеру). Позднее Дирихле установил достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье (они сейчас называются условиями Дирихле).

Конструкция определенного интеграла построена Риманом в мемуаре «О представимости функций тригонометрическими рядами». Первая часть мемуара содержит исторический обзор. Риман подчеркнул отличие своего подхода к решению задачи от предшественников. Он писал: «Предшествующие работы, посвященные рассматриваемому вопросу, имели целью обосновать разложение функций в ряд Фурье для случаев, встречающихся в природе, поэтому доказательство могло быть начинаемо для совершенно произвольных функций и в дальнейшем на поведение функции могли быть налагаемы те или иные требуемые самим доказательством искусственные ограничения при условии, чтобы эти ограничения не стояли в противоречии с поставленной задачей. Мы же имеем целью установить лишь те условия, которые действительно необходимо наложить на поведение функции для того, чтобы она могла быть представлена тригонометрическим рядом; поэтому нам нужно сначала найти необходимые условия представимости и потом из них выбрать те, которые являются и достаточными. Итак, предшествующие авторы доказывали: если функция обладает такими-то и такими-то свойства-

ми, то она представима рядом Фурье. Мы же ставим перед собою обратный вопрос: если функция представима тригонометрическим рядом, то что можно сказать о ее поведении, об изменении ее значения при непрерывном изменении аргумента?» [33, с. 241].

И вот на этом этапе возникла необходимость обобщения понятия интеграла, распространения его на разрывные функции. «Здесь оказалось необходимым, писал Риман, — дать краткие предварительные объяснения по поводу понятия определенного интеграла и условий, при которых это понятие является не лишенным смысла» [33, с. 225]. И еще: «Неотчетливость, которая свойственна в ряде основных моментов учению об определенном интегрировании, вынуждает нас к предварительным разъяснениям по поводу понятия определенного интеграла и условий, при которых оно имеет смысл.

Итак, вот первый вопрос: что нужно понимать под знаком $\int_a^b f(x) dx$?» [33, с. 236].

Построение интеграла Римана известно всем, кто изучал математику в институте.

Рассмотрим функцию $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Разобьем промежуток произвольным образом точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на части. Обозначим наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ через λ . На каждом из частичных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольно точки $x = \xi_i$ и вычислим значения $f(\xi_i)$ функции $f(x)$ в этих точках. Составим теперь сумму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$. Ее называют римановой, чаще интегральной.

Конечный предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$ называется определенным интегралом от $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Когда такой предел существует, функция называется интегрируемой на $[a, b]$. Риман установил необходимый и достаточный критерий интегрируемости функции. Обозначим ω_i колебание $f(x)$ на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, т. е. разность между верхней и нижней гранями значений функции на нем. Тогда для интегрируемости функции

$f(x)$ на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое $\delta > 0$, что, как только $x_{i+1} - x_i < \delta$, будет $|\sum \omega_i \Delta x_i| < \varepsilon$. Это означает, что указанная сумма будет стремиться к нулю вместе со стремлением к нулю наибольшего частичного промежутка.

На современном языке тот же критерий звучит так. Функция будет интегрируемой по Риману, если интервал интегрирования конечен, функция на нем ограничена и множество точек разрыва функции имеет лебеговскую меру нуль.

Сразу же за установлением критерия интегрируемости Риман дал пример функции, имеющей бесконечное множество точек разрыва, но интегрируемой.

Риман в мемуаре не сформулировал ни одного свойства интеграла; вся часть мемуара с обсуждением вопросов об интеграле — построение его, критерий интегрируемости, пример разрывной в бесконечном числе точек, но интегрируемой функции — занимает всего пять страниц. Однако он пользовался следующими свойствами:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

$$\int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = [f(x) \varphi(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad a = x_0 < x_1 < \dots$$

$$\dots < x_n < x_{n+1} = b,$$

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx,$$

m и M — минимум и максимум функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Свойства интеграла доказывали многие математики, например П. Дюбуа-Реймон, Г. Дарбу, К. Нейман, К. Жордан, С. Штольц и другие.

Г. Дарбу построил интегральные суммы, носящие его имя и вошедшие в учебники по анализу рядом с интегралом Римана. Пусть m_i и M_i — точные нижняя

и верхняя грани функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$. Составим суммы

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \text{ и } S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Это и будут нижняя и верхняя суммы Дарбу. Из определения нижней и верхней граней следует

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

Умножим члены неравенств на $\Delta x_i > 0$ и получим

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Это означает, что нижняя и верхняя суммы Дарбу служат точными нижней и верхней гранями интегральных сумм.

С помощью сумм Дарбу условие существования интеграла формулируется так: чтобы существовал определенный интеграл, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что, как только $\lambda < \delta$ (все длины $\Delta x_i < \delta$), будет выполняться неравенство

$$S - s < \varepsilon.$$

Далее. Как пределы нижней и верхней сумм Дарбу вводятся нижний и верхний интегралы Дарбу

$$I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S.$$

Условие существования интеграла теперь формулируется так: необходимым и достаточным условием существования определенного интеграла будет равенство нижнего и верхнего интегралов Дарбу, $I_* = I^*$. Общее значение этих интегралов, очевидно, и дает величину определенного интеграла.

На этом мы закончим рассказ о том, как развивалось понятие интеграла до середины XIX в. Но движение математики вперед на этом не остановилось. Идея интеграла интересовала ученых, живших позже, интересует она и современных математиков. Понятие интеграла все время совершенствуется и углубляется, но рассказ об этом — тема другой книги.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

И вот перевернута последняя страница книги, в которой говорилось о развитии одной из ведущих идей математики. Но тема неисчерпаема, исследованием понятия интеграла занимались тысячи тружеников науки, включая самых великих, занимаются им и сейчас.

У читателя могут возникнуть вопросы. И прежде всего — что же было дальше?

Исследования интеграла после Римана не прекратились, а пошли все более убыстряющимся темпом. Если бы перечислить лишь математиков, внесших значительный вклад в теорию интеграла во второй половине XIX и в XX в., то это заняло бы много места. И книга, посвященная пути интеграла от Римана, скажем, до середины XX в., получилась бы значительной. Интеграл был, есть и будет стержневым понятием в математике. Не случайно символом Международного математического конгресса, который проходил в Москве в 1966 г., был знак интеграла.

Для дальнейших обобщений интеграла внутри самой математики должны были созреть условия, допускающие это. Такие условия создала разработанная в конце XIX в. и начале XX в. теория множеств с важнейшим понятием меры множества. Возникло новое понятие — интеграл Лебега, обобщающий интеграл Римана. Лебег ввел дескриптивное определение интеграла: сформулировал его свойства, не содержащее указаний на построение. Он дал также конструктивное определение интеграла — аналитическое и геометрическое.

Работы Лебега послужили значительным импульсом для дальнейших исследований в математике. Теория меры и интеграл Лебега служат теоретическим инструментом в современной теории дифференциальных уравнений, теоретической и математической физике, теории обобщенных функций, теории линейных операторов и спектральной теории, теории вероятностей, теории случайных процессов и других разделах математики.

Почти одновременно с Лебегом при решении задачи о распределении массы $\varphi(x)$ на интервале $[0, x)$ обобщение интеграла Римана осуществил Т. Стилтес¹. Введение интеграла Стилтеса (1856—1894) также привело к новым работам, посвященным его свойствам, различным приложениям, выяснению связи интеграла Стилтеса с интегралами Римана и Лебега.

В 1912 г. появилось обобщение интеграла Лебега — интеграл А. Дакжуа (1884—1973), вызвавший новый поток исследований. В 1930 г. А. Н. Колмогоров (р. 1903) опубликовал работу, в которой охвачены все интегралы как пределы различных интегральных сумм. Интеграл Колмогорова нашел применение в математической физике, при математическом обосновании квантовой механики.

В развитие понятия интеграла, помимо Колмогорова, внесли свой вклад и другие русские математики. Они сделали первостепенной важности открытия. Это П. Л. Чебышев, А. А. Марков (1856—1922), А. М. Ляпунов, Н. П. Лузин (1883—1950), А. Я. Хинчин (1894—1959)². Но работы их лежат вне временного интервала «пути к интегралу», поэтому в данной книге не рассматривались.

Выскажем теперь несколько замечаний общего характера. Принятая схема — наука развивается под влиянием запросов практики и смежных наук, в силу своей внутренней логики развития — не может быть полной, ибо в ней не находит места такой важный фактор, как индивидуальность творцов ее. В подтверждение этой мысли процитируем не математиков, а химиков, ведь эти высказывания их можно отнести к любой науке.

В. Рамзай (1852—1916) в одном из выступлений говорил: «Разрешение загадок обладает для многих людей большой притягательной силой. Природа окружает нас загадками, и попытки решения их принадлежат к величайшим радостям жизни»³. Э. Фишер (1852—1919) писал: «Наука не представляет ничего абстрактного; как продукт человеческой работы, она в своем развитии тесно связана со своеобразием и судьбой тех лиц, которые ей посвящают себя»⁴.

Все это следует учитывать при изучении истории любой науки и, конечно, математики.

ПРИМЕЧАНИЯ

К главе «Истоки»

- ¹ Цит. по: Ван-дер-Варден Б. М. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции/Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959, с. 114.
- ² При чтении этих строк следует иметь в виду, что ни о каком решении квадратных уравнений в том смысле, как это делается сейчас, не может быть и речи: у древних не было символической алгебры, все встречающиеся уравнения они записывали словами. Символика в математику вошла лишь в XVI в., после Виета. Греки же решали квадратные уравнения геометрически, построением.

К главе «Рождение идеи»

- ¹ Цит. по: Веселовский И. Н. Архимед. М.: Учпедгиз, 1957 с. 8.
- ² Представляют интерес полученные Архимедом с помощью метода исчерпывания результаты. Кроме отмеченных в тексте, это:
- 1) Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади круга, радиус которого равен среднему геометрическому между диаметром его основания и образующей.
 - 2) Площадь боковой поверхности конуса равна площади круга, радиус которого равен среднему геометрическому между радиусом основания конуса и образующей.
 - 3) Отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания его равно отношению образующей к радиусу основания.
 - 4) Площадь поверхности шарового сегмента такая же, как площадь круга, у которого радиус равен длине отрезка, соединяющего вершину сегмента с окружностью его основания.
 - 5) Объем шарового сектора равен объему конуса, у которого площадь основания равна поверхности сегмента, а высота — радиусу шара.
 - 6) Площадь эллипса относится к площади круга, диаметр которого равен большой оси эллипса, как малая ось эллипса относится к большой оси.
 - 7) Объем сегмента параболоида вращения, отсеченного перпендикулярной оси вращения плоскостью, в полтора раза превышает объем конуса с теми же основанием и осью.
 - 8) Отношение объема сегмента гиперболоида вращения, отсеченного перпендикулярной оси вращения плоскостью, к объему конуса с теми же основанием и высотой равно отношению суммы высоты сегмента с утроенной действительной полуосью гипер-

болы к сумме высоты сегмента с удвоенной действительной полуосью гиперболы.

- 9) Объем половины эллипсоида вращения в два раза больше объема конуса, имеющего основанием круг, радиус которого равен малой полуоси эллипса, а высота — большой полуоси.
- 10) Отношение объема меньшей части эллипсоида вращения, полученной при пересечении его плоскостью, перпендикулярной оси, к объему вписанного в нее конуса равно отношению суммы большой полуоси эллипса с осью большего сегмента к оси большего сегмента.
- 11) Площадь, ограниченная первым витком спирали Архимеда (и полярной осью), равна трети площади первого круга. (Радиус первого круга спирали $\rho = a\theta$ будет $r = 2\pi a$.)
- 12) Площадь между первыми двумя витками спирали Архимеда (и полярной осью) относится к площади второго круга (его радиус равен $4\pi a$), как 7 к 12.
- 13) Площадь сектора спирали Архимеда относится к площади сектора круга, имеющего радиус, равный большему радиус-вектору рассматриваемого сектора спирали, как сумма произведения большего радиус-вектора на меньший радиус-вектор спирали и $1/3$ квадрата разности большего и меньшего радиус-векторов к квадрату большего радиус-вектора.
- 14) Круг равновелик прямоугольному треугольнику, катеты которого равны радиусу круга и длине окружности.
- 15) Несоизмеримые величины могут уравниваться на рычаге, плечи которого обратно пропорциональны этим величинам.
- 16) Центр тяжести параллелограмма лежит на прямой, соединяющей середины противоположных сторон.
- 17) Центр тяжести треугольника находится на его медиане.
- 18) Центр тяжести сегмента параболы располагается на его диаметре.
- 19) Если в сегмент параболы вписывать «определенным образом» прямолинейные фигуры и процесс продолжать неограниченно, то центр тяжести сегмента параболы будет находиться как угодно близко к центру тяжести таких фигур.
- 20) Центры тяжести двух подобных сегментов параболы делят диаметры их в том же отношении, в каком находятся сами диаметры.

Прочитав эти теоремы, математик будет поражен обилием открытых свойств, их тонкостью и изяществом. Даже знающему интегральное исчисление не так просто доказать результаты Архимеда. Рассмотрим, например, теорему 8. Объем тела вращения определяется по формуле

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Будем вращать гиперболу $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ вокруг оси Ox , получим гиперболоид вращения. Перенесем начало координат в вершину гиперболы. Уравнение гиперболы будет $(x + a)^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, откуда

$$y^2 = b^2 [(x + a)^2/a^2 - 1] = b^2 (x^2 + 2ax)/a^2.$$

Получим объем гиперболоида вращения с высотой сегмента гиперболы $h = c$:

$$v_1 = \pi \int_0^c y^2 dx = \pi \int_0^c \frac{b^2 (x^2 + 2ax) dx}{a^2} = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2ax^2}{2} \right) \Big|_0^c = \frac{\pi b^2 c^2 (c + 3a)}{3a^2}.$$

Найдем теперь объем соответствующего конуса. Квадрат радиуса основания конуса совпадает с y^2 при $x = c$, т. е.

$$r^2 = y^2 \Big|_{x=c} = \frac{b^2 (x^2 + 2ax)}{a^2} \Big|_{x=c} = \frac{b^2 c (c + 2a)}{a^2}.$$

Объем конуса высоты $h = c$ будет $v_2 = \pi b^2 c^2 (c + 2a) / 3a^2$. Тогда

$$v_1/v_2 = (c + 3a)/(c + 2a).$$

³ Цит. по: *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1978, с. 70—71.

⁴ Немало, вероятно, ради экономии крайне дефицитных и дорогих материалов, заменяющих бумагу, было смыто в монастырях текстов классиков древности.

⁵ Цит. по: *Лурье С. Я.* Архимед, с. 257.

К главе «Развитие идеи»

¹ Думается, нет надобности затруднять читателя указанием страниц при цитировании «Стереометрии». Работа сравнительно невелика, и соответствующие места найти легко.

² Заключительные стихи — перефразировка стихов Катюлла к Лесбии.

³ Андерсон издал основной труд Виета «Искусство анализа», не увидевший света при жизни автора.

⁴ Цит. по: *Выгодский М. Я.* Иоганн Кеплер и его научная деятельность. — В кн.: Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. М.; Л.: ГТТИ, 1935, с. 61—62.

⁵ Цит. по: *Выгодский М. Я.*, с. 97.

⁶ Приведенный С. Я. Лурье во вступительной статье к «Геометрии» и повторенный Ф. А. Медведевым в «Развитии понятия интеграла» (М.: Наука, 1974) и Л. С. Фрейманом к книге «Творцы высшей математики» (М.: Наука, 1968) этот пример может показаться крайне тривиальным. В самом деле, объем чаши получается мгновенно, если из объема цилиндра высоты $h = r$ $V_1 = \pi r^3$ вычесть объем полусферы $V_2 = 2\pi r^3/3$. Объем чаши будет $V = V_1 - V_2 = \pi r^3/3$. Ведь это не тот случай, когда Архимед на рычаге при известных объемах цилиндра и конуса находил неизвестный объем шара.

Может быть, Кавальери намерен был лишний раз продемонстрировать метод неделимых. Но тут возник сопутствующий парадокс с окружностью и ее центром, который ему пришлось разрешать.

⁷ Цит. по: *Лурье С. Я.* Геометрический эпос Кавальери. — В кн.: Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом

- при помощи неделимых непрерывного/Пер., вступ. статья и коммент. С. Я. Лурье. М.; Л.: ГТТИ, 1940.
- 8 При чтении этого материала, как и многого в дальнейшем, нужно иметь в виду, что подобных уравнений кривых тогда не писали, не было и понятия функции вообще, тем более таких функций, как $y = e^x$, $y = \log x$.
 - 9 Цит. по: Фрейман Л. С. Ферма, Торричелли, Роберваль.— В кн.: У истоков классической науки. М.: Наука, 1968, с. 218.
 - 10 Цит. по: Стройк Д. Я., с. 139.
 - 11 Цит. по: Башмакова И. Г. Пьер Ферма (1601—1665).— В кн.: Замечательные ученые. М.: Наука, 1980, с. 53.
 - 12 Конечно же, на рисунке Роберваля векторов не было.
 - 13 Цит. по: У истоков классической науки. М.: Наука, 1968, с. 281.
 - 14 Цит. по: Крамар Ф. Д. Интеграционные методы Джона Валлиса.— В кн.: Историко-математические исследования, вып. 14. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961, с. 15.
 - 15 Цит. по: Крамар Ф. Д., с. 29—30. Цитаты, связанные с работой Валлиса, будут приводиться по этой же статье, поэтому ссылки можно и не делать.
 - 16 Заметим, что символ ∞ ввел Валлис при рассмотрении отрицательных показателей степеней.
 - 17 Цит. по: История математики. М.: Наука, 1970, т. 2, с. 182.
 - 18 См. с. 27—29.
 - 19 Данное определение касательной отличается от принятого в настоящее время и не обладает достаточной общностью. Оно, например, не охватывает случаи касательных в точках перегиба или в точках, где производная терпит разрыв.

К главе «Возникновение и оформление интеграла»

- 1 Цит. по: История математики, т. 2, с. 221.
- 2 Это название работе Ньютона дал первый ее издатель Колсон. Первая страница рукописи утеряна, и не известно, как ее именовал Ньютон.
- 3 Необходимо подчеркнуть, что никакой таблицы интегралов в том смысле, как мы ее понимаем сейчас, Ньютон не писал. Не было еще произнесено и слово «интеграл». Ньютон перечислял кривые, квадратуры которых он получил, и записывал эти квадратуры.
- 4 Конечно же, обозначений логарифмической и показательной функций у Ньютона не было. Все строилось на основе геометрических соображений.
- 5 Сумму ряда обратных квадратов нашел через семьдесят лет Эйлер. Она составляет $\pi^2/6$.
- 6 Здесь и далее цит. по: Погребысский И. Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. М.: Наука, с. 213—224.
- 7 Сочинение Х. Гюйгенса «Маятниковые часы».
- 8 На рис. 19 длина отрезка OG равна $y - xy'$.
- 9 Кривая названа так в честь итальянского математика XVIII в. Марио Гастани Аньези.
- 10 По поводу практического применения этого ряда Ньютон во втором письме Лейбницу заметил, что потребовалось бы 1000 лет, чтобы вычислить 20 знаков числа π .
- 11 Цит. по: Погребысский И. Б., с. 229.

- ¹² Цит. по: *Погребыский И. Б.*, с. 253.
- ¹³ См.: *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1974, т. III, с. 580.
- ¹⁴ Цит. по: *Медведев Ф. А.* Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974, с. 121—122.
- ¹⁵ Индиктионы — пятнадцатилетние циклы. Исчисление индиктионов начинается до н. э. Трудность задачи состояла в некоторой неопределенности начала первого индиктиона.
- ¹⁶ Похвальба была, видимо, в крови у этих гениев. Я. Бернулли получил формулу для суммирования степеней натуральных чисел. Он заявил, что с помощью ее «в течение получаса» нашел сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел. Сумма эта содержит 32 цифры.
- ¹⁷ В ранние годы занятий математикой Я. Бернулли открыл многие свойства логарифмической спирали, в том числе и то, что эволюта (геометрическое место центров кривизны) ее тоже логарифмическая спираль. Это свойство и имелось в виду на надгробном камне.
- ¹⁸ Это не совсем так. Интегралы от равных дифференциалов отличаются на произвольную постоянную.
- ¹⁹ Слово «лемниската» происходит от латинского «лента». Лемниската имеет форму повернутой на прямой угол восьмерки. Ее уравнение в декартовых координатах $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) = 0$, в полярных — $\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$.
- ²⁰ Такие уравнения теперь называются уравнениями Бернулли.
- ²¹ Занятия медициной, юриспруденцией, коммерцией и др. велись в роду Бернулли по настоянию родителей, намеревавшихся отвлечь выдающихся представителей рода от математики; она в те времена не могла обеспечить семью.
- ²² Введение интегрирующего множителя, в свою очередь, было важным открытием. Применение его для таких уравнений не имеет смысла.
- ²³ От греческих слов βραχιστος — кратчайший и χρόνος — время.
- ²⁴ И не только математикам. Дж. Свифт, например, в «Путешествиях Гулливера» упоминает о ней: «На второе был подан напиток в форме циклоиды».
- ²⁵ Подробное описание решения И. Бернулли имеется, например, в книге: *Пойя Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
- ²⁶ Гюйгенс установил, что если расположить циклоиду так, чтобы основание было горизонтально и лежало выше производящего круга, то из какой бы точки ее ни начало спускаться тело, оно придет в низшую точку за одно и то же время. Свойством таутохроны Гюйгенс воспользовался при конструировании часов.
- ²⁷ По количеству работ к Эйлеру приближается лишь Коши, у которого их более 700.
- ²⁸ Во время семилетней войны имение Эйлера в пригороде Берлина было разорено. Русское командование возместило убытки, а Екатерина II прислала ему дополнительно тысячу флоринов.
- ²⁹ Термины «определенный интеграл» и «пределы интегрирования» ввел Лаплас.
- ³⁰ Эйлер вместо знака интеграла писал S — первую букву слова *summa*.

К главе «Интегралы Коши и Римана»

- ¹ Институт Франции объединяет пять академий: Французскую академию, Академию надписей и изящной словесности, Академию наук (Парижскую академию наук), Академию искусств, Академию моральных и политических наук.
- ² Знак определенного интеграла ввел Фурье.
- ³ Коши прочитал лекцию в Парижской академии наук о сходимости рядов. После нее Лаплас поспешил домой, чтобы проверить, не допустил ли он ошибок в своей «Небесной механике».
- ⁴ Этот талантливый математик умер в 28 лет.
- ⁵ Цит. по: *Монастырский М. И.* Бернхард Риман. М.: Знание, 1979, с. 7.
- ⁶ Немецкий математик А. Л. Крелль (1780—1855) в 1826 г. основал «Журнал чистой и прикладной математики», в котором публиковались теоретические статьи.
- ⁷ Цит. по: *Монастырский М. И.*, с. 57.
- ⁸ Как известно, это свойство справедливо не всегда, но Риман не делает никаких оговорок: в рассматриваемых им случаях ограничений не требуется.

К «Заключению»

- ¹ Публикация Стильеса по рассматриваемому вопросу относится к 1895 г., первая публикация Лебега — к 1902 г.
- ² В частности, работы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова по проблеме моментов предшествовали работе Стильеса.
- ³ Цит. по: *Рамсей У., Оствальд В.* Популярно-научные очерки. Пг., 1920, с. 93.
- ⁴ Цит. по: *Герц В.* Очерк развития основных воззрений химии, Л., 1924, с. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель*. Физика/Пер. В. П. Карпова. М.; Л.: Гостехиздат, 1937.
2. *Архимед*. Сочинения/Пер., ст. и коммент. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Башмакова И. Г.* Пьер Ферма (1601—1665).— В кн.: Замечательные ученые. М.: Наука, 1980.
4. *Бернал Д.* Наука в истории общества. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
5. *Бройль Луи де*. По тропам науки. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Бурбаки П.* Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
7. *Ван-дер-Варден*. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции/Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959.
8. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия/Пер. А. П. Юшкевича. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Герье В.* Лейбниц и его век. СПб., 1968. Т. 1.
10. *Декарт Р.* Геометрия/Пер., примеч. и статья А. П. Юшкевича. М.; Л.: ОНТИ, 1938.
11. *Евклид*. Начала. Т. 1/Пер., статья и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии М. Я. Выгодского, И. Н. Веселовского. М.; Л.: ГТТИ, 1948.
12. История математики. Т. 1. М.: Наука, 1970.
13. История математики. Т. 2. М.: Наука, 1970.
14. История математики. Т. 3. М.: Наука, 1972.
15. История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1971.
16. *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного/Пер., ст. и коммент. С. Я. Нурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
17. *Кеплер И.* Новая стереометрия винных бочек/Пер. и предисл. Г. П. Свешникова; Вступ. ст. М. Я. Выгодского. М.; Л.: ГТТИ, 1935.
18. *Кляус Е. М., Погребысский И. В., Франкфурт У. И.* Паскаль (1623—1662). М.: Наука, 1971.
19. *Коши О. Л.* Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823). СПб., 1831.
20. *Крамар Ф. Д.* Интеграционные методы Джона Валлиса.— ИМИ, 1961, 14.
21. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика/Пер. под ред. В. Л. Гончарова. М.; Л.: ГТТИ, 1947.
22. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. 2-е изд. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1.
23. *Лебег А.* Лекции об интегрировании и отыскании примитивных функций (1928). М.; Л.: ГТТИ, 1934.

24. Лурье С. Я. Архимед. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945.
25. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974.
26. Нейгебауер О. Точные науки в древности. М.: Наука, 1968.
27. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. Рождение новой математики. М.: Наука, 1976.
28. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. М.: Наука, 1984.
29. Ньютон И. Математические работы/Пер., ст. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
30. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1966.
31. Погребысский И. Б. Г. В. Лейбниц. М.: Наука, 1971.
32. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
33. Риман Б. Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
34. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики/Пер. и дополн. И. Б. Погребысского. М.: Наука, 1978.
35. Толстов Г. П. О криволинейном и повторном интеграле. — Труды Мат. ин-та АН СССР, 1950, 35.
36. Тумаков И. М. А. Л. Лебег. М.: Наука, 1975.
37. У истоков классической науки: Сб. ст. М.: Наука, 1968.
38. Фихтенгольц Г. М., Натансон И. П. Криволинейные и кратные интегралы. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
39. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. М.: Наука, 1968.
40. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.; Л.: ГТТИ, 1932.
41. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ГТТИ, 1933.
42. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. I/Пер. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского, предисл. М. Я. Выгодского. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
43. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. II/Пер. и предисл. И. Б. Погребысского. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
44. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. III/Пер. и коммент. Ф. И. Франкеля. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
45. Эйнштейн А. Физика и реальность. М.: Наука, 1965.
46. Юшкевич А. П. О возникновении понятия об определенном интеграле Коши. — Труды Ин-та ист. естеств. М.; Л., 1947, т. 1
47. Barrow J. Collected works. Cambridge, 1860.
48. Bernoulli Joh. Die erste Integralrechnung. Leipzig; Berlin, 1914.
49. Galilei G. Le opere. V. VI. Firenze.
50. Ouvrages de mathematique de M. de Roberval; a la Haye, 1731.
51. Pascal B. Oeuvres complètes. P., 1963.
52. Torricelli E. Opera geometrica. Florentiae, 1644.
53. Wallis J. Opera mathematica. Oxoniae, 1693—1695. Vol. 1—3.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Истоки	6
Рождение идеи	15
Развитие идеи	31
Возникновение и оформление интеграла	103
Интегралы Коши и Римана	164
Заключение	179
Примечания	181
Литература	187



АРХИМЕД
(ок. 287—212 до н. э.)



И. КЕПЛЕР
(1571—1630)



Б. КАВАЛЬЕРИ
(1598—1647)



Э. ТОРРИЧЕЛЛИ
(1608—1647)



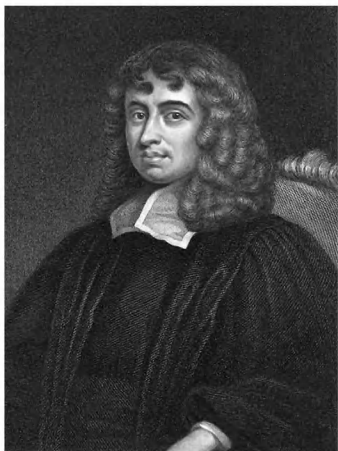
Б. ПАСКАЛЬ
(1623—1662)



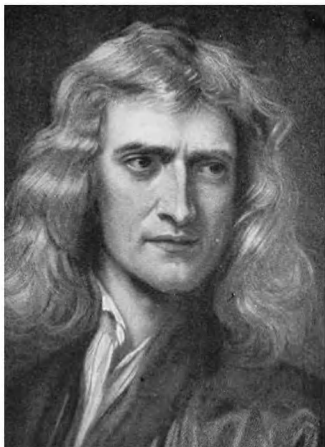
П. ФЕРМА
(1601—1665)



Д. ВАЛЛИС
(1616—1703)



И. БАРРОУ
(1630—1677)



И. НЬЮТОН
(1643—1727)



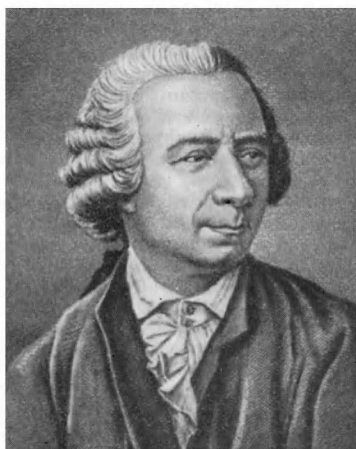
Г. В. ЛЕЙБНИЦ
(1646—1716)



И. БЕРНУЛЛИ
(1667—1748)



Я. БЕРНУЛЛИ
(1654—1705)



Л. ЭЙЛЕР
(1707—1783)



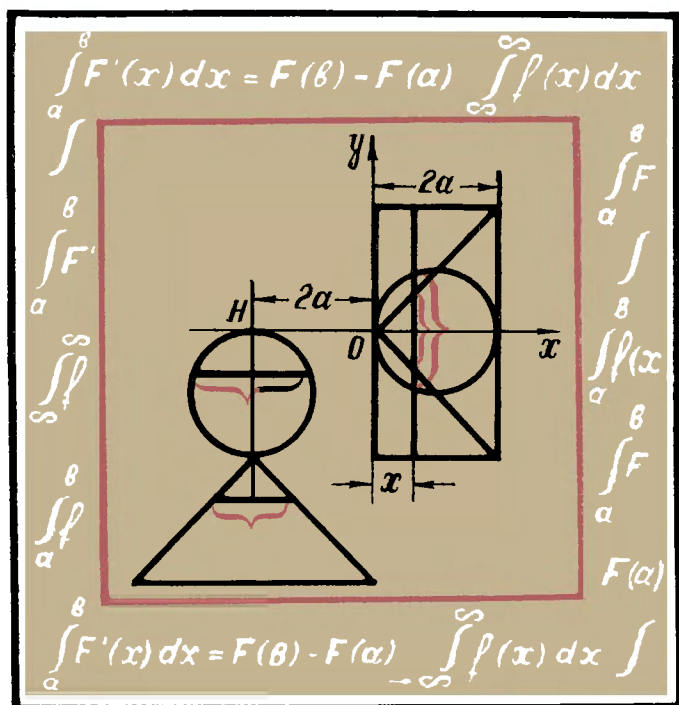
О. Л. КОШИ
(1789—1857)



Г. Ф. Б. РИМАН
(1826—1866)

В. А. НИКИФОРОВСКИЙ

ПУТЬ К ИНТЕГРАЛУ



ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА